PROBLEMATA
GEOMETRICA
SEXAGINTA

Circà Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasquè præcipuè versantia.

À F. STEPHANO ANGELI
VENETO,

ORDINIS JESVATORVM S. HIERONYMI,
In Veneta Prouincia Definitore Prouinciali, elaborata.

CVM PRIVILEGIO.



VENETIIS. MDCLVIII.

Apud Andream Iulianum.

DE CONSENSV SVPERIORVM.

Illuſt.mo & Excell.mo D. D.

MARCO ANTONIO,

Illuſtriſsimiſque

ANTONIO, ac

LAVRENTIO

FRATRIBVS CORRARIIS.

FR. STEPHANVS ANGELI,
Ieſuatorum Ordinis in Veneta Prouincia
Definitor Prouincialis P. P. P.

EX Geometrica arbore hos fructus ſelegi; primogenita ſanè laborum meorum indoles, ac elucubratio. Veſtræ benignitatis, Illuſtriſſimi Proceres, Numini, ac Tutamini, dicandos fore decreui. Hac etenim fœliciter exculti, erupuerunt in germina, & vſquè ad maturitatis pignora ſuccreuere. Par in omnes obſequium attraxit animum, nàm æquè meritò præſtatis eximij. Nec Paris ille, qui potiora diuinitatis inſignia diſcreuit, cuinam deberetur oblatio, maieſtatis, probitatis, ac Virtutis ſingulum ex vobis, magiſquè dignum ſpecimen ſeligeret. Ergo ſingularis deuictiſſimæ meæ propenſionis, veſtrum ſtemmati, ac Nomi-

a 2 *ni*

ni pariter hæc arrha ſacretur. Beneficijs adſtringi, an anguſtius, vel auguſtius dixerim, nequibam. Trina me humanitatis vix deuxit. Vos, qui gratiarum munus triplex, ac numerum refertis, allexiſtis ſuauiter calamum, compulliſtis ingenium, vt opellulæ huius verticem veſtro Nomine, & titulis coronarem. Addidit ad hæc calcaria, quod ſemper vobis ſtudium impendi. Vobis itaquè, qui inter cælicos Veneti Emporij Heroas auitæ Nobilitatis radijs corruſcatis, & indiuiduæ præſtantiæ fulgetis inſignibus, hoc excelſiori omnium omine ductus, primogenitè elaborata monimenta, appendo. Profectò, Nobiliſſimæ veſtrum progeniei Maieſtatem, inſulatas trabeas, purpuras præclariſſimas, quibus honorem auxit ANTONIVS ille CORRARIVS, vitæ ſanctimonia, magis quam cognomento Eminentiſſimus; morum ſuauitate, & innocentia, potius quam Nomine FLORIDVS: Qui Ieſuati amictus candorem ſua purpura decorauit, vt proindè non rectè Roſa ſuperbiat Veneris cruoribus depicta in purpuream: ſummum, ac Diuinum in terris Imperium, cuius, in GREGORIO XII. Pontificatu, ac præclariſſimis operibus verè Maximo, diademate ſemel exornaſtis comas, ſed millies promeruiſtis decus, perterrita mei venerabatur ſeruitus, tenuiſquè muneris oblatam vilitatem aſpernabatur animus. Sed timorem correxit impauidus; ditauit namquè munuſculi inopiam ſumma vouentis deuotio, quæ Bruti illius quondam alumna, ſilueſtribus tectum inuolucris, pretioſiorem exhibuit venerabundi affectus enixum. Excipite igitur hilares hoc qualecumque Votum, veſtrumque dignum; cùm nec minimum ſpondeat, qui totum promit quod habet. Parcant vobis Parcæ, qui æternitati viuitis.

AD

AD LECTOREM.

LIBELLVM hunc Geometricum tibi propono, Benigne Lector. Verſatur equidem circa res, ætate noſtra, neglectas; at ſi alius, quam Geometricus extaret, nequaquam his temporibus adeò bonis artibus aduerſis, illum tibi exhiberem. Haud ignoro, ferreo hoc ſæculo, quo Mars, & Bellona vbique triūmphant, exigi non animi, ſed corporis vires. Verùm ſolius Matheſis, inter alias facultates, peculiare agnoſcitur, non minus paci, quam bello inſeruire. Forſitan conclamabis. Quid boni in rebus tam vilibus? in meris nugis? in tuis Problematibus. Fateor equidem Problemata hoc Libello comprehenſa, nugas eſſe, ſed nugas Geometricas, proindeque rebus etiam in alijs facultatibus eminentibus, nequaquam poſthabendas. Etenim Matheſi euenit, quod in nobiliori, perfectiorique ſpecie, reſpectu ignobilioris agnoſcitur. Ignobilius enim indiuiduum ſpeciei ſuperioris, præſtat perfec-

tiori

tiori speciei inferioris. Sic Geometria, adeo super cæteras humanas facultates sua extollitur certitudine, vt Geometricæ nugæ à Viris, qui propriè Viri, & non sues sint, margaritæ pretiosæ censeantur. Hæc conscribo putans aliquos meæ indolis Geometras forsitan adinueniri. Etenim res Geometricas sic esurio, vt libenter perlegam ea omnia, quæ Geometriam aliqualiter redolent. Sic puto, aliquos faciliter esse reperiendos, qui hæc, quæcumque sint, libenter percurrent, obseruentque illud Doctoris gentium pronuntiatum. Omnia probate, quod bonum est tenete. Hæc tibi communico cupiens laborum meorum aliqualiter periculum facere. Etenim, si aliquando mihi compertum erit, hæc tibi haud displicuisse, forsitan alia in non modica quantitate, vel his pulchriora, vel his turpiora, aliquando communicabo.

Verùm antequam opus præcipuum aggrediar, de duobus velem te monitum esse. Primum est; Euclidianorum Elementorum citationes in hoc Libello nunquam afferri. Secundum est; Sectiones per axem in Conis, Sphæris, alijsque solidis, quamuis necessariæ pro solutione Problematum, frequenter, passimque omitti. Causa primi est. Quia cum Problemata hæc circa Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasque præcipuè versentur, ac proinde supponant Lectorem in doctrinis Apollonij Pergæi, & Archimedis versatum, ipsum multò magis requirunt Euclidis Elementa peroptimè callere. Præterquam quod, cùm ferè nullum verbum proferatur, quòd ab Elementis non dependeat, & attamen omnia loca afferre labor

im-

immenſus cenſeatur , malui omnia prætermittere, quàm aliqua dumtaxat adducere. Secundum conſimilem cauſam agnoſcit, nimirum hæc conſcripta eſſe pro Lectore aliqualiter perito, cui Sectiones per axem neceſſariæ, ſunt obuiæ. His ergo præmiſſis, omiſſiſque parergis, ad erga deueniamus. Vale.

FA-

FACVLTAS

Reuerendissimi Patris Generalis.

LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

OPVS *inscriptum*, Sexaginta Problemata Geometrica, *compositum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.*

Datum Brixiæ in Nostro Monasterio Corporis Christi, die quarta Nouembris 1657.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

Locus Sigilli.

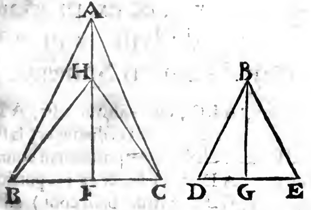
LEM-

LEMMA PRIMVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Coni habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione baſium, & altitudinum.

SINT duo coni, B A C, D B E, quorum axes, ſeù altitudines ſint A F, B G. Dico proportionem coni A B C, ad conum B D E, componi ex proportione A F, ad B G, & ex proportione baſis B F C, ad baſim D G E.



Super baſim B C, fiat alius conus, cuius altitudo ſit

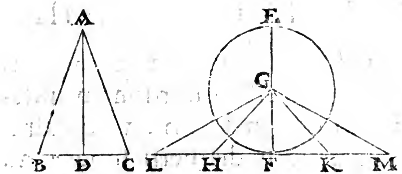
FH, ęqualis altitudini BG. Iam conus ABC, ad conum BDE, de foris sumpto cono BHC, habet proportionem compositam ex proportione coni ABC, ad conum HBC, & ex proportione coni HBC, ad conum DBE: Sed vt conus ABC, ad conum HBC, sic (propter eandem basim BFC,) altitudo AF, ad altitudinem HF, seù ad BG, ei ęqualem: & vt conus HBC, ad conum DBE, sic (propter æquales altitudines HF, & BG,) basis BFC, ad basim DGE. Ergo proportio coni BAC, ad conum DBE, componitur quoque ex proportione AF, ad BG, & ex proportione basis BFC, ad basim DGE. Quod ostendere oportebat.

LEMMA II. PROP. II.

Conus ad Sphæram habet proportionem compositam ex proportione altitudinis coni ad Semidiametrum Sphæræ, & ex proportione quadrati radij basis coni, ad quadratum Diametri Sphæræ.

SIT conus, ABC, cuius altitudo sit, AD, & sit sphæra, cuius centrum, G, diameter, EF. Dico, conum ad sphæram habere proportionem compositam, ex proportione, AD, ad, FG, & ex proportione quadrati, BD, (si, D, sit centrum basis coni) ad quadratum, EF.

Intel-



Intelligantur duo coni, quorum altitudo ſit, G F, ſemidiameter ſphæræ, & ſint, G H K, cuius baſis diameter ſit H K, æqualis, E F, & G L M, cuius baſis diameter ſit, L M, ipſius E F, dupla. Iam probatum eſt ab Archim. 1. de Sphær. & Cylindro Prop 32. conum, H G K, eſſe quartam partem ſphæræ, cuius diameter, E F; ſed etiam eſt quarta pars coni, L G M, quia, & baſis eſt quarta pars baſis; ergo ſphæra, & conus, L G M, ſunt æquales. Ergo conus, A B C, ad hæc duo ſolida habet eandem proportionem. Sed proportio coni ABC, ad conum, L G M, componitur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione baſis, B D C, ad baſim, L F M, nempè ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, L F, ſeu ad quadratum E F. Ergo etiam proportio coni, A B C, ad ſphæram componetur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, E F. Quod erat oſtendendum.

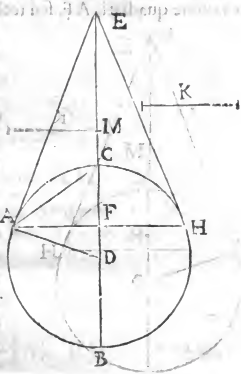
LEMMA III. PROP. III.

Conus ſua ſuperficie conica tangens Sphæram, eſt ad portionem ſphęræ ab ipſo incluſam, vt quadratum reſidui diametri ſphęræ, ad rectangulum comprehenſum ſub dicto reſiduo, & ſub ſegmento diametri intercepto inter centrum ſphæræ, & baſim coni; vna cum rectangulo ſub ſemidiametro ſphærę, & ſub prædicta intercepta.

SIT Sphæra, ABHC, & ſit conus rectus, EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram; & omnia intelligantur ſecta per axim, adeò vt, ABHC, ſit circulus maximus; D, centrum; EA, EH, latera trianguli per axim; AFH, diameter baſis coni; BFCE, diameter circuli, & axis coni. Dico conum, EAH, ad portionem ſphæræ, ACH, ab ipſo comprehenſam, eſſe vt quadratum BF, ad rectangulum, BFD, cum rectangulo, BDF.

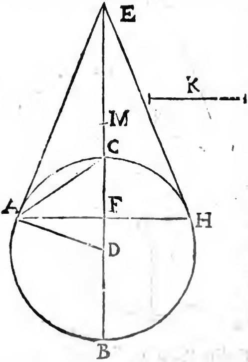
Coni

Coni ad portionem proportio componitur ex proportione coni ad sphæram, & sphæræ ad portionem: proportio coni ad sphæram componitur ex proportione, EF, ad DB, & ex proportione quadrati, AF, ad quadratum, CB, ex Propos. antec. & pariter proportio sphæræ ad portionem componitur ex proportione quadrati, BC, ad quadratum, CF, & ex proportione, DB, ad FB, continuatam, BD, vt deducitur ex



Archi. 2. de sphæra, & Cylin. Prop 4. Ergo ratio quoque coni, AEH, ad portionem, ACH, componetur ex quatuor rationibus; nempè ex ratione, EF, ad DB; DB, ad, FB, continuatam, BD; ex ratione quadrati, AF, ad, ad quadratum, CB; & quadrati, CB, ad quadratum, CF. Sed duæ rationes, EF, ad DB, & DB, ad FB, continuatam, BD, faciunt rationem, EF, ad FB, continuatam, DB. Et pariter duæ rationes quadrati, AF, ad quadratum, CB, & quadrati, CB, ad quadratum, CF, faciunt rationem quadrati, AF, ad quadratum, CF. Ergo proportio coni ad portionem, componetur

netur ex ratione, E F, ad, F B, continuatam, D B, & ex ratione quadrati, A F, seu rectanguli, B F C, ei æqualis, ad quadratum, F C, hoc est (propter eandem altitudinem, F C,) ex ratione, B F, ad, F C. Sed vt, E F, ad, F B, continuatam, B D, sic (sumpta, F D, communi altitudine) rectangulum, E F D, seu ei æquale, C F B, (nam ducta, A D, ob tangentem, E A, & angulum rectum, E A D, quadrato, F A, est æquale rectangulum, E F D, cui etiam quadrato, A F, est æquale rectāgulum,



C F B,) ad rectangulum sub, F D, in, F B, continuatam, B D. Ergo proportio coni ad portionem componetur ex ratione, B F, ad, F C, & ex ratione rectanguli, C F B, ad rectangulum sub, F D, in F B, continuatam, B D. Rursum proportio rectanguli, C F B, ad rectangulum sub, F D, in, F B, continuatam, B D, componitur ex ratione, C F, ad, F D, & ex ratione, F B, ad, F B, continuatam, B D. Ergo à primo ad vltimum, proportio coni ad portionem componitur ex proporti one, B F, ad F C; F C, ad, F D (quæ duæ faciunt

ratio-

rationem, BF, ad, FD,) & ex ratione, BF, ad, FB, continuatam, BD. Sed istæ duæ rationes componunt rationem quadrati, BF, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD; quod rectangulum est postea æquale duobus rectangulis, BFD, BDF. Ergo conus ad portionem est, vt quadratum, BF, ad duo rectangula, BFD, BDF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, quod diuidendo erit excessus coni supra portionem ad portionem, vt quadratum, BD, ad duo rectangula, BFD, BDF. Nam quadratum, BD, est excessus quadrati, BF, supra duo rectangula, BFD, BDF, vt consideranti patet.

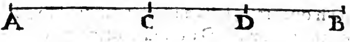
LEMMA IV. PROP. IV.

Sit recta linea, AB, secta bifariam in C, & non bifariam in, D. Dico quadratum, AD, maius esse quã sexquitertium duorum rectangulorum, ADC, ACD.

Quoniam enim duo rectangula, ADC, ACD, sunt minora duobus rectangulis, ACB, ABC: & quadratum, AC, est tertia pars rectangu-

lorum,

lorum, ACB, ABC; ergo erit maius quam tertia



pars rectangulorum, ACD, ADC. Ergo componendo, quadratum, AC, cum duobus rectangulis, ACD, ADC, nempè totum quadratum, AD, erit maius quam ſexquitertium rectangulorum, ACD, ADC. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

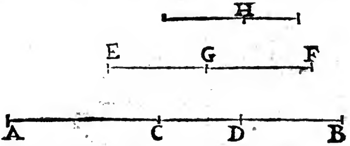
EX dictis infertur in figura Propoſ. 3. conum EAH, ad portionem, ACH, habere proportionem maiorem ſexquitertia. Nam in eadem propoſitione oſtenſum eſt conum ad portionem habere rationem quadrati, BF, ad duo rectangula, BDF, BFD. Et iam patet, BC, ſecari bifariam in, D, & non bifariam in, F.

LEMMA V. PROP. V.

Datam AB, ſectam bifariam in C. rursùm ſecare in D, inter CB, vt quadratum AD, ad duo rectangula ACD, ADC, ſit in data proportione.

Data

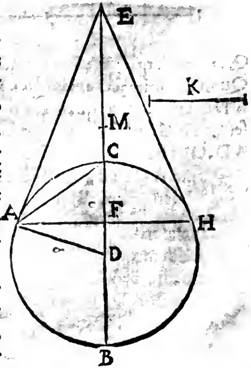
DAta proportio ſit, quam habet, E F, ad F G; quam patet debere eſſe exceſſus, ſed ex Lemmate anteced. minorem ſexquitertia. Inter E G, E F, ſit media proportionalis H. Cùm ergo E F, ſit maior quam ſexquitertia F G; ergo E G, erit maior ſubquadrupla E F; ergo erit etiam maior ſubdupla H. Si ergo fiat, vt E G, ad H, ſic A C, ad A D, punctum D, cadet inter



C, B. Fiat ergo; & aſſero punctum D, eſſe quæſitum. Quoniam enim factum eſt, vt E G, ad H, ſic A C, ad A D. Ergo, & vt quadratum E G, ad quadratum H, ſeù, vt E G, ad E F, ſic quadratum A C, ad quadratum A D. Ergo, & conuertendo, vt F E, ad E G, ſic quadratum A D, ad quadratum A C. Et per conuerſionem rationis, vt E F, ad F G, ſic quadratum A D, ad exceſſum ipſius ſuper quadratum A C, nempè adduo rectangula A C D, A D C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA I. PROP. VI.

Circa datam ſphęram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, cuius ſuperficies conica tangat ſuperficiem ſphæricam, & quod conus ſit ad portionem ab ipſo incluſam in data proportione.



Datæ ſphæræ ſit circulus maximus A B H C, cuius centrum D, diameter BC, & data proportio ſit, quam habet DC, ad K, quàm ex ſuperioribus patet, maiorē eſſe ſexquitertia. Tunc datam rectam CB, diuiſam bifariā in D, diuidamus rursùm in F, inter C, D, vt quadratum BF, ſit ad duo rectangula BDF, BFD, vt BC, ad K, ex Lem-

mate

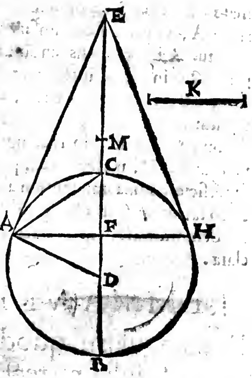
mate antecedenti; à puncto F, erigatur perpendicularis F A, vsque ad circumferentiam, & à puncto A, ducatur A E, tangens circulum, occurrens diametro productæ in E; & intelligantur omnia reuolui circa axim E B, more geometrico, donec redeant ad principium motus. Iam patet à circulo restitui sphæram datam, & à triangulo rectangulo E A F, fieri conum rectum E A H, includentem portionem A C H, & sua superficie conica tangentem superficiem sphæricam. Dico talem conum esse quæsitum. Non immororcirca demonstrationem, quia ex præmissis est nimis clara.

LEMMA VI. PROP. VII.

Rectangulum, quod fit sub tangente, & sub sinu recto alicuius arcus, est maius quadrato chordæ eiusdem arcus.

SIT circulus, cuius diameter sit B C, centrum D, A E, sit tangens arcus A C, occurrens diametro productæ in E; A F, sit sinus rectus; & A C, sit chorda eiusdem arcus. Dico rectangulum E A F, maius esse quadrato A C.

Ducatur A D; & quoniam propter angulum rectum E A D, duo triangula E A D, A D F, sunt similia. Ergo erit, vt E D, ad D A, seu ad D C, ei æqualem,



ſic D A, ſeù D C, ad D F. Ergo, & diuidendo, erit vt E C, ad C D, ſic C F, ad F D. Et permutando, erit vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F. Sed C D, eſt maior D F; ergo, & E C, erit maior C F. Ergo componendo, tota E F, erit maior dupla F C. Ergo rectangulum ſub D A, E F, maius erit rectangulo ſub D A, in duplam C F. Sed rectangulo ſub D A, in duplam C F, eſt æquale rectangulum ſub dupla D A, nempè ſub diametro B C, in C F; & huic rectangulo eſt æquale quadratum A C. Ergo rectangulum ſub D A, in E F, erit maius quadrato A C. Sed quoniam propter ſimilitudinem triangulorum D A F, E A F, rectangulum ſub D A, in E F, eſt æquale rectangulo E A F; (nam eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F;) ergo rectangulum E A F, erit maius quadrato A C. Quod erat oſtendendum.

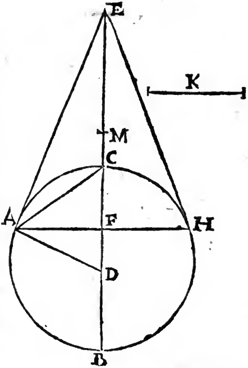
SCHO-

SCHOLIVM.

Elicitur ex dictis, & ex ostensis ab Archi., quod si tàm circulus, quàm triangulum E A F, intelligantur volui circa B E, donec redeant ad initium motus, adeò vt à circulo generetur sphæra, & à triangulo conus E A H; elicitur inquam, quod superficies conica erit maior superficie sphærica portionis ab ipso inclusa. Nam cum ostendat Archi. 1. de Sphæra, & Cylindro prop. 14. cuiuslibet coni recti superficiem esse æqualem circulo, cuius radius sit media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum circuli basis; & pariter cum ostendat propositionibus 40. & 41. eiusdem libri, superficiem sphæricam portionis sphæræ æquale esse circulo, cuius radius sit linea ducta à polo ad circumferentiam basis; & circuli sint ad se inuicem vt quadrata semidiametrorum; sequitur, quod superficies conica erit ad superficiem sphæricam portionis, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus, & semidiametrum suæ basis, siue erit, vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis; hoc est in præsenti, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C. Iam verò rectangulum E A F, ostensum est maius quadrato A C; quare, & superficies conica coni E A H, erit maior superficie sphærica portionis A C H; & insuper totus perimetro coni erit maior toto perimetro portionis.

LEMMA VII. PROP. VIII.

Dati circuli diametrum producere, vt ab aliquo puncto eiusdem diametri ductis tangente, sinu recto, & chorda alicuius arcus; rectangulum sub tangente, & sinu recto, sit ad quadratum chordæ in data ratione possibili.



SIT datus circulus, cuius diameter, B C; centrum D; oportet producere diametrum, puta in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & chorda A C; rectangulum, E A F, sit ad quadratum A C, in data proportione.

Ex dictis patet oportere proportionem datam esse maioris inæqualitatis. Sit ergo ea, quàm habet D C, ad

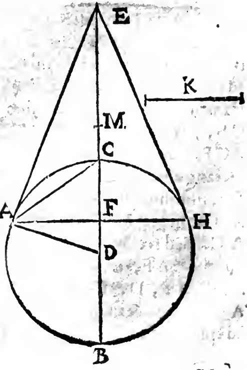
K; fiat

K; & fiat, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F. patet D F, minorem eſſe D C; nam, cum D C, ſit maior K; ergo exceſſus duplæ D C, ſuper K; nempè exceſſus B C, ſuper K, erit multò maior K; quare, & D C, ſeù B D, erit maior D F. A' puncto ergo F, erigatur perpendicularis F A, & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E, & iungatur A C. Dico factum eſſe, quod imperebatur. Eodem proceſſu, quo factum eſt in Lemmate anteced. oſtendetur eſſe, vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F; & componendo, vt E F, ad F C, ſic C D, cum D F, nempè B F, ad F D. Eſt autem vt B F, ad F D, ſic B C, ad K; (nam cum factum ſit, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F; erit componendo vt B C, ad K, ſic B F, ad F D.) Ergo erit etiam, vt E F, ad F C, ſic B C, ad K; & vt antecedentium dimidia, nempe vt dimidia E F, ad F C, ſic D C, ad K. Sed vt dimidia E F, ſeù vt F M (diuiſa F E, bifariam in M,) ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine C B,) rectangulum ſub F M, in C B, ad rectangulum B C F; nempe ad quadratum A C, ei æquale; & cum rectangulo ſub M F, B C, ſit æquale rectangulum ſub E F, in dimidiam B C, nempe in A D; ergo vt D C, ad K, ſic erit rectangulum ſub E F, in D A, ad quadratum A C. Sed rectangulo ſub E F, D A, eſt æquale rectangulum E A F, quia (propter ſimilitudinem triangulorum E A F, D A F, eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F.) ergo, & vt D C, ad K, ſic rectangulum E A F, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA II. PROP. IX.

Circa datam ſphæram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, & tangentem ſua ſuperficie conica ſuperficiem ſphæricam, adeò vt ſuperficies conica ſit ad ſuperficiem ſphæricam portionis ab eo incluſam in data proportione.



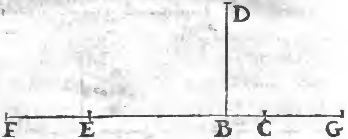
PAtet ex Scholio Propoſitionis 7. oportere proportionē datam eſſe maioris inæqualitatis. Sit ergo datæ ſphæræ circulus maximus, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio ſit ea, quā habet D C, ad K. Diameter B C, producatur taliter in E, vt factis iiſdem, quæ in anteced. Lemmate, rectāgulum E A F, ſit ad

qua-

quadratum A C, in data proportione D C, ad K. Et intelligantur, consueto modo, omnia reuolui circa B E. Dico factum esse, quod imperebatur. Deducitur enim ex Arch. supra citato, superficiem coni, E A H, ad superficiem portionis A C H, esse, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C; seu, ex factis, vt D C, ad K. Quod erat faciendum.

LEMMA VIII. PROP. X.

Sint E B, B D, B C, tres lineæ continue proportionales; & F B, sit maior B E; & producatur F C, in G, taliter, vt rectangulum F G C, sit æquale quadrato B D. Dico E B, maiorem esse C G.

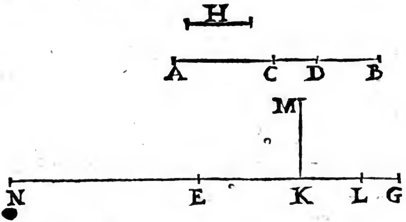


NAM rectangulum F G C, est æquale rectangulo E B C, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato D B. Ergo erit, vt F G, maior ad B C, minorem sic E B, maior ad C G, minorem. Ergo C G, est minor E B. Quod ostendere oportebat.

LEMMA IX. PROP. XI.

Datam rectam A B, sectam in puncto C, bifariam, rursum in D, inter C, B, taliter diuidere, vt rectangulum A B D, sit ad rectangulum A D C, cum rectangulo sub A B, in C D, in data proportione.

DAta ratio sit, quam habet A B, ad H. Ob euitandam verò confusionem, exponatur E K, æqualis A C, quæ ex vna parte continuetur in N, vt N K, sit tripla E K; & ex alia parte continuetur in L, vt K L,



sit æqualis H; & inter E K, K L, sit media M K. Tunc (per ab alijs facta) data media proportionali M K, & data differentia extremarum N L, in ordine trium continue

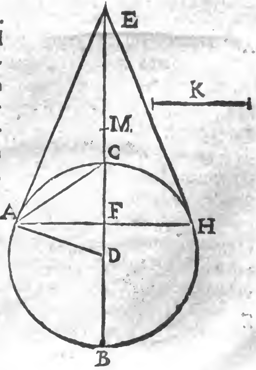
tinue

tinue proportionalium, inueniantur extremæ, quæ sint N G, G L; & ipsi G L, fiat æqualis C D, quæ per Lemma, antecedens erit minor E K, seù C B. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo rectangula E K L, N G L, sunt æqualia, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato M K; ergo est vt N G, ad K L, sic E K, ad L G. Sed E K, est æqualis A C; K L, est æqualis H; L G, est æqualis C D; & N G, est æqualis triplæ A C, C D, & H; ergo, & vt tripla A C, cum C D, & H, ad H, sic A C, seù ei æqualis C B, ad C D. Et diuidendo, vt tripla A C, cum C D, ad H, sic B D, ad D C. Ergo factum sub extremis, erit æquale facto sub medijs; nempe factum sub tripla A C, cum C D, in C D, erit æquale facto sub D B, in H. Ergo rectangulum sub C B, in D B, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub C B, in D B, ad rectangulum sub D B, in H, est, vt C B, ad H. Ergo etiam erit, vt C B, ad H, sic rectangulum C B D, ad rectangulum sub composita ex tripla A C, cum C D, in C D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic rectangulum A B D, ad factum sub tripla A C, cum C D, in C D. Sed factum sub tripla A C, cum C D, in C D, est æquale rectangulo sub A B, in C D, & rectangulo A D C, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic erit rectangulum A B D, ad rectangula A B, C D, & A D C. Quod erat faciendum.

LEMMA X. PROP. XII.

Sit datus circulus, cuius centrum sit D, & diameter eius BC, sit producta in E, & à puncto E, ducantur tangens EA, & sinus rectus AF. Dico dimidiam EF, maiorem esse sinu verso FC.



Diuidatur EF, bifariam in M. Patet enim, quod ducta AD, propter angulum rectum EAD, & propter similitudinem triangulorum rectangulorum EAD, DAF, erit, vt ED, ad AD, seù ad DC, ei æqualem, sic AD, seù DC, ad DF. Et diuidendo, erit vt EC, ad CD, sic CF, ad DF. Et permutando, vt EC, ad CF, sic CD, ad DF. Sed CD, est maior

DF;

DF; ergo, & EC, erit maior CF. Et consequenter, dimidia totius EF, nempe MF, erit maior CF. Quod ostendere oportebat.

LEMMA XI. PROP. XIII.

Datis ijsdem, quæ in superiori propositione, & diuisa EF, bifariam in M. Dico esse, vt MC, ad CF, sic dimidiam CF, ad FD.

QVoniam enim duo rectangula EFD, BFC, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato AF; ergo erit, vt EF, ad FC, sic BF, ad FD. Et antecedentium dimidia, nempe erit, vt MF, ad FC, sic dimidia BF, ad FD. Et diuidendo, erit, vt MC, ad CF, sic excessus dimidiæ BF, super FD, ad FD; hoc est, ita erit dimidia CF, ad FD; quia excessus dimidiæ BF, super FD, est æqualis dimidiæ CF. Quod patet, quia dimidia BF, est dimidia CD, cum dimidia DF; excessus autem dimidiæ CD, cum dimidia DF, super DF, est idem, ac excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF; cùm verò CF, sit excessus totius CD, super totam DF. Ergo, & dimidia CF, erit excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF. Quare patet propositum.

LEM-

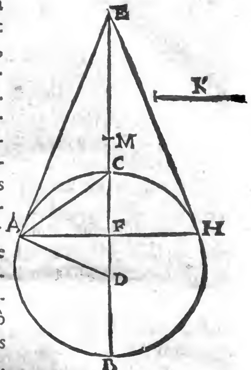
LEMMA XII. PROP. XIV.

Dati circuli diametrum taliter producere, vt ductis tangente, ſinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum ſub tangente, & ſinu recto, vna cum quadrato ſinus recti, ſit ad quadrata chordæ, & ſinus recti, in data proportione.

SIT datus circulus, cuius centrum D; diameter ſit BC. Oportet ipſam diametrum taliter continuare in E, vt ductis tangente EA, ſinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, cum quadrato AF, ſit ad duo quadrata CA, AF, in data proportione.

Iam in propoſitione 7. patuit proportionem datam debere eſſe exceſſus. Quia, cum rectangulum EAF, oſtenſum ſit maius quadrato AC; etiam addito communi quadrato AF, rectangulum EAF, cum quadrato AF, erit maius duobus quadratis CA, AF. Sit ergo proportio data ea, quam habet BD, ad K; & data recta BC, ſecta bifariam in puncto D, rurſum taliter diuidatur in pũcto F, inter C, D, vt rectangulum BCF,

ſit



ſit ad duo rectangula B C, F D, & B F D, vt duplus exceſſus D B, ſuper K, ad K, per propoſitionem vndecimã. Tunc à puncto F, erigatur diametro perpẽdicularis F A; & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E; & ducatur A C. Dico iuſſum eſſe adimpletum. Diuidatur E F, in M, bifariam. Quoniam verò factum eſt, vt duplus exceſſus B D, ſuper K, ad K, ſic rectangulum B C F, ad rectangula B C, F D, & B F D; ergo, & vt antecedentium dimidia; nempe, vt exceſſus B D, ſuper K, ad K, ſic rectangulum ſub B C, in dimidiam C F, ad rectangula B C, F D, & B F D, nempe ad rectangulum ſub compoſita ex C B, B F, in F D. Sed, vt rectangulum ſub B C, in dimidiam C F, ad rectangulum ſub compoſita ex B C, B F, in F D, ſic rectangulum B C M, ad rectangulum ſub compoſita ex B C, B F, in F C. Ratio eſt, quia proportiones horum rectangulorum componuntur ex iiſdem proportionibus. Nam ex Lemmate antecedenti, eſt, vt dimidia C F, ad F D, ſic

M C,

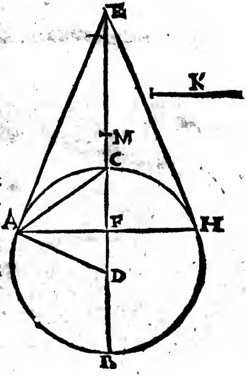
MC, ad CF; & proportio BC, ad compositam ex BC, & BF, est eadem in vtroque antecedenti ad suum consequens. Ergo, & vt excessus BD, super K, ad K, sic rectangulum BCM, ad rectangulum sub composita ex BC, BF, in FC. Ergo, & componendo, vt BD, ad K, sic rectangulum BCM, cum rectangulo sub cõposita ex BC, BF, in FC, nempe cum duobus rectangulis BCF, BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum BCM, cum rectangulo BCF, facit vnicum rectangulum sub BC, in MF, cui postea est æquale rectangulum sub dimidia BC, nempe sub DA, in EF, duplam ipsius FM. Ergo, vt BD, ad K, sic est rectangulum sub EF, DA, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulo sub EF, DA, propter similitudinem triangulorum EAF, FAD, est æquale rectangulum EAF (vt sæpè dictum est.) Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BFC, BCF. Sed rectangulum BFC, est æquale quadrato AF, & rectangulum BCF, est æquale quadrato AC. Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum quadrato AF, ad duo quadrata AC, AF; hoc est, ex Archimede supra citato, sic superficies conica, & basis, nempe totus perimeter coni, ad superficiem sphæricam portionis, & ad basim, hoc est ad totum perimetrum portionis. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA III. PROP. XV.

Datis iisdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, adeò vt totus perimeter coni, sit ad totum perimetrum portionis ab eo inclusam in data proportione.

Problema ex antecedentibus Lemmatibus, & ex Archimede supra citato, est facilis solutionis; quapropter in eius solutione non est amplius immorandum, sed est relinquenda industriæ Lectoris.

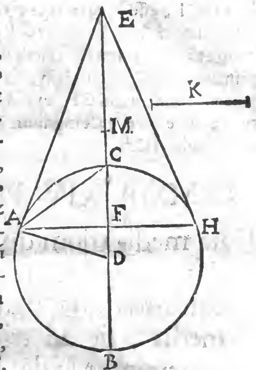


LEMMA XIII. PROP. XVI.

Sit conus E A H, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram ACHB, modo ſupradicto; & ECFB, ſit axis coni, & diameter ſphæræ; & diametro BC, ſit normalis A F, & D, ſi ſit centrum ſphæræ. Dico perimetrum reſidui coni, dempta portione A CH, ad perimetrum portionis A CH, eſſe, vt E D, cum tripla DC, ad triplam D C, cum D E.

QVoniam enim (vt deducitur ex Archimede locis ſupra citatis,) perimeter ſolidi excauati, ſeù reſidui coni, dempta portione, eſt ad perimetrum portionis, vt rectangulum E A F, cum quadrato A C, ad quadrata A C, A F; & cum, propter ſimilitudinem triangulorum E A F, A F D, rectangulum E A F, ſit æquale rectangulo ſub A D, ſeù D C, in EF; & pariter, cum quadrato A F, ſit æquale rectangulum B F C; & quadrato A C, ſit æquale rectangulum B C F. Ergo, & vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis,

nis, ſic erit rectangulum D C, E F; cum rectangulo B C F, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulum D C, E F, diuiditur in duo rectangula D C F, & D C E; & rectangulum D C E, eſt æquale rectangulo ſub E D, in C F; (vt poſtea oſtendetur;) ergo, & perimeter ſolidi excauati erit ad perimetrũ portionis, vt rectangulum E D, C F, vna cum rectangulo D C F, & cũ rectangulo B C F, ad rectangulum B C F,

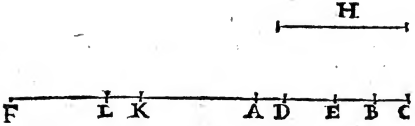


cum rectangulo B F C. Sed rectangula E D, C F; D C F, & B C F, faciunt rectangulum ſub compoſita ex E D, cum tripla D C, in C F; & pariter rectangula B C F, & B F C, faciunt rectangulum ſub compoſita ex C B, B F, in F C, nempe ſub tripla C D, cum D F, in F C. Ergo erit, vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis, ſic rectangulum ſub E D, cum tripla D C, in C F, ad rectangulum ſub tripla C D, cum D F, in C F, nempe (propter eandem altitudinem F C,) ſic E D, cum tripla D C, ad triplam D C, cum D F. Quod erat oſtendendum.

Quòd verò supra assumptum est, nempe rectangulum DCE, esse æquale rectangulo, ED, CF, patet; quia cum, ex sæpè dictis, tres ED, DC, & DF, sint continue proportionales, facilè deducitur esse, vt ED, primam ad DC, secundam, sic EC, excessum primæ super secundam, ad CF, excessum secundæ super tertiam; quare patet rectangulum ED, CF, esse æquale rectangulo DCE.

LEMMA XIV. PROP. XVII.

Data media trium quantitatum continue proportionalium, inuenire extremas, vt maior cum tripla media, sit ad triplam mediam cum minore in data proportione.



DAta media sit AB, & data ratio sit, quam habet AB, ad BE, quam patet esse excessus; & inter AB, BE, sit media proportionalis H; & producatur

BA,

B A, in F, vt F B, sit tripla B A; & ab ipsa F B, auferatur F K, æqualis triplæ B E (vbicumque cadat punctum K:) deinde data media H, & differentia extremam B K, in ordine trium continue proportionalium, inueniantur extremæ B L, L K. Patet L K, esse minorem A B, nam etiam media H, est minor ea. Fiat ergo A D, æqualis L K, & fiat, vt A D, ad A B, sic A B, ad A C. Dico tres C A, A B, A D, esse quæsitas.

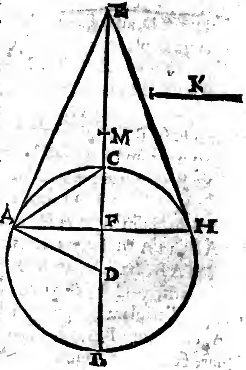
Quoniam enim quadrato H, sunt æqualia ambo rectangula B L K, & A B E; ergo ista rectangula sunt æqualia inter se; quare erit, vt B L, ad B E, sic B A, ad L K, seù ad A D, quæ L K, facta fuit æqualis. Sed B L, sunt æquales B K, cum L K, hoc est cum A D. Quare, & vt B K, cum A D, ad B E, sic B A, ad A D. Et ad consequentium tripla; ergo, vt B K, cum A D, ad triplam B E, sic B A, ad triplam A D. Sed F K, facta fuit tripla B E; ergo erit, vt K B, cum A D, ad F K, sic A B, ad triplam A D. Et componendo, erit vt B F, cum A D, ad F K, seù ad triplam B E, sic B A, cum tripla A D, ad triplam A D. Et ad consequentium subtripla. Ergo erit, vt F B, cum A D, ad B E, sic B A, cum tripla A D, ad A D. At verò, quoniam tres C A, A B, & A D, sunt continue proportionales, est vt B A, cum tripla A D, ad A D, sic C A, cum tripla A B, ad A B. Ergo erit etiam, vt C A, cum tripla A B, ad A B, sic F B, cum A D, ad B E. Ergo, & permutando, erit, vt C A, cum tripla A B, ad F B, cum A D, nempe ad triplam B A, cum A D, sic A B, ad B E. Sed C A, est maior; B A, est media data, & D A, est minor. Quare factum est, quod imperebatur.

PRO-

PROBLEMA IV. PROP. XVIII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter ſolidi excauati, nempe reſidui coni ablata portione, ſit ad totum perimetrum portionis in data proportione.

DAta ratio ſit, quàm habet BD, ad K: & data DC, media in ordine trium continue proportionalium inueniantur extremæ DF, minor, & DE, maior tali lege, vt ſit ſicut BD, ad K, ſic DE, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF; per propoſitionem antecedentem. A puncto autem F, erigatur perpendicularis diametro FA, & iungatur EA, quam patet tangere circulũ, & ſphæram; quia du-



cta

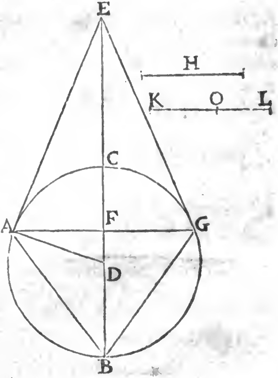
cta D A, cum sit, vt E D, ad D C, seù ad D A, sic D C, seù D A, ad D F; ergo triangula E A D, A D F, sunt similia. Vnde cum angulus A F D, sit rectus, etiam angulus E A D, erit rectus, & proinde E A, erit tangens. Cùm verò E A, tangat circulum; ergo, & superficies coni facti à triangulo E A F, tanget sphærá. Reliqua sunt nimis clara, ideò ex industria omittuntur.

PROBLEMA V. PROP. XIX.

Diametrum sphæræ datæ taliter continuare in puncto, vt à puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpēdiculari ad diametrum, & alia ad polum alterius portionis, rhombi facti ex reuolutióne circa diametrum, conus tangens ad reliquum conum sit in data proportione.

Datæ sphæræ sit diameter B C, centrum D; oportet autem diametrum B C, taliter continuare in E, vt ducta tangente A E, dimissa perpendiculari A F, & iuncta A B, & reuoluto triangulo E A B, adeò vt fiat rhombus E A B G; conus E A G, sit ad conum A B G,

A B G, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet B D, ad H. Secetur D C, taliter in F, vt ſit ſicut B D, ad H, ſic C F, ad F D; & à puncto F, erecta normali F A, & ductis A B, & tangente A E, occurrente diametro in E; & intellectis conis EAG, B A G, ortis ex conſueta reuolutione. Dico eſſe quæſitos.



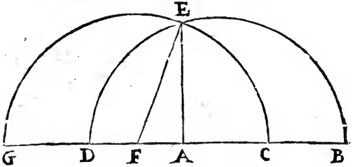
Nam, propter eãdem baſim A G, conus E A G, ad conum B A G, eſt, vt axis E F, ad axim B F. Quoniam autem rectangula E F D, B F C, ſunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato A F; eſt, vt E F, ad F B, ſic C F, ad F D; & C F, ad F D, facta eſt, ſicut B D, ad H. Ergo, & vt B D, ad H, ſic conus E A G, ad conum B A G. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XV. PROP. XX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub vna parte, sit ad quadratum alterius partis in data proportione.

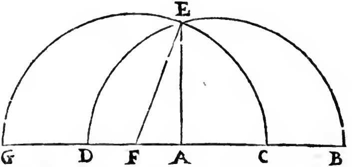
SIT data recta linea A B, & proportio data sit ea, quam habet B A, ad A D, ei positam in dire-



ctum. Oportet diuidere A B, in C, vt rectangulum ABC, sit ad quadratum A C, in data proportione. Super D B, tanquam supra diametrum fiat semicirculus; & à puncto A, erigatur diametro perpendicularis A E; diuisaque D A, bifariam in F, & iuncta F E, centro F, interuallo F E, fiat semicirculus G E C, secans A B, in C. Dico punctum C, esse quæsitum.

Duo enim rectangula G A C, B A D, sunt æqualia

inter se, quia æqualia eidem quadrato A E. Ergo erit, vt B A, ad A C, sic G A, ad A D. Et diuidendo, vt

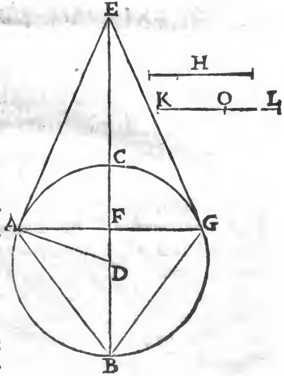


BC, ad C A, sic G D, ad D A. Sed G D, est æqualis A C, quia cum tota G F, sit æqualis totæ F C, & ablata D F, sit æqualis ablatæ F A; ergo reliqua G D, erit æqualis reliquæ A C; quare erit, & vt B C, ad C A, sic C A, ad A D. Ergo tres B C, C A, A D, erunt continue proportionales. Quare rectangulum sub B C, in D A, erit æquale quadrato A C. Ergo rectangulum A B C, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum A B C, ad rectangulum sub B C, D A, est (propter eandem altitudinem B C,) vt B A, ad A D. Ergo, & vt B A, ad A D, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XVI. PROP. XXI.

Sit circulus, cuius centrum D, diameter B C, continuata in E; E A, ſit tangens, & A F, ſit ſinus rectus arcus A C. Dico eſſe, vt rectangulum D C F, ad rectangulum ſub dupla D F, in D F, ſic rectangulum B E C, ad rectangulum CBF.



PAtet; quia proportiones horum rectãguloru m componũtur ex iiſdem proportionibus. Nam proportio D C, ad D F, eſt eadem cum proportione E B, ad B F; & proportio C F, ad duplam D F, eſt eadem cũ proportione E C, ad C B, vt ſtatim patebit; quare patet propoſitum.

 Pri-

Primum ergo, nempè, quod, vt D C, ad D F, sic sit E B, ad B F; patet, quia, cum, vt sæpè dictum est, sit, ob æqualitatem rectangulorum E F D, B F C, vt E F, ad F B, sic C F, ad F D, erit componendo, vt E B, ad B F, sic C D, ad D F.

Secundum, nempè, quod sit, vt C F, ad duplam F D, sic E C, ad C B, pariter est clarum; quia cum pariter, vt sæpè dictum est, sit, vt E D, ad D C, sic D C, ad D F, erit diuidendo, vt E C, ad C D, sic C F, ad F D. Et ad consequentium dupla. Ergo vt E C, ad C B, sic C F, ad duplam F D.

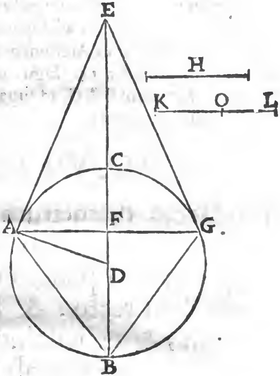
PROBLEMA VI. PROP. XXII.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet B D, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Data proportio B D, ad H, continuetur ad tertium terminum K L, adeò vt sit, vt B D, ad H, sic H, ad K L; diuisaque K L, bifariam in O; diuidatur etiam, per Lemma antecedens, D C, in F, adeò vt sit, sicut B D, ad K O, sic rectangulum D C F, ad quadratum D F; & à puncto F, erecta normali A F, ducta tangente E A,

EA, & factis conis EAG, BAG. Dico esse quæsitos nimirùm esse, vt BD, ad H, sic superficiem coni EAG, ad superficiem coni BAG.

Nam, cùm sit, vt BD, ad KO, sic rectangulum DCF, ad quadratum DF. Ergo, & vt BD, ad KL, duplam KO, sic rectangulum DCF, ad duo quadrata DF, seù ad rectãgulum sub dupla DF, in DF. Sed, vt rectãgulum DCF, ad rectangulum sub dupla DF, in DF, sic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF; ex Lemmate antecedenti. Ergo, & vt BD, ad KL, sic rectangulum BEC, ad rectangulum CBF. Sed rectangulo BEC, est æquale quadratum tangentis EA, & rectangulo CBF, est æquale quadratum BA. Ergo, & vt BD, ad KL, sic quadratum EA, ad quadratum AB. Sed, vt BD, ad KL, sic est quadratum BD, ad quadratum H. Ergo, & vt BD, quadratum, ad quadratum H, sic est quadratum EA, ad quadratum AB. Quare,



&

& vt linea B D, ad H, sic E A, ad A B. Sed (sumpta communi altitudine A F,) vt E A, ad A B, sic est rectangulum E A F, ad rectangulum B A F; vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum B A F, sic superficies conica coni E A G, ad superficiem conicam coni B A G, vt deducitur ex Archimede primo de Sphæra & Cylindro proposit. 14. Ergo, & vt B D, ad H, sic erit superficies coni E A G, ad superficiem coni B A G. Quod erat faciendum.

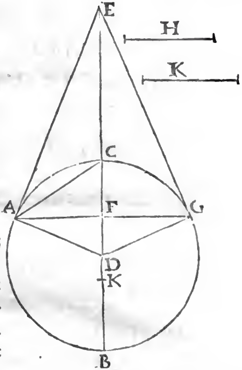
PROBLEMA VII. PROP. XXIII.

Producere diametrum datæ sphæræ in puncto, vt ab illo ducta tangente, & à puncto contactus ductis sinu recto, & linea ad centrum; & ex reuolutione triangulorum, orto rhombo; coni rhombi sint in data proportione.

SI data sphæra, cnius centrum D, & data ratio sit, quàm habet B *D*, ad H. Oportet producere B C, diametrum datæ sphæræ in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & semidiametro A D, & facto rhombo E A *D* G, conus E A G, sit ad conum A *D* G, vt B *D*, ad H.

Fiat,

Fiat, vt B D, ſimul cum H, ad H, ſic B D, ad D K; & inter B D, D K, inueniatur media, cui ſit æqualis D F; & per F, excitetur A F G, normalis B C; & à puncto A, agatur tangens A E, occurrens diametro in E; & iuncta A D, intelligatur rhombus, E A D G. Dico hunc eſſe quæſitum. Quoniam enim, vt ſæpè dictum eſt, tres E D, D C, D F, ſunt continuè proportionales; & quia F D, eſt media inter B D, ſeù C D, & D K; ergo, quatuor E D, D C, D F, & D K, ſunt continuè proportionales. Ergo erit, vt prima E D, ad tertiam D F, ſic ſecunda C D, ad quartam D K. Sed, vt C D, ſeù B D, ad D K, ſic eſt B D, ſimul cum H, ad H. Ergo, & vt E D, ad D F, ſic B D, cum H, ad H. Et diuidendo, vt B D, ad H, ſic E F, ad F D; nempè conus E A G, ad conum A D G, propter eandem baſim A F G. Factum eſt ergo, quod erat faciendum.

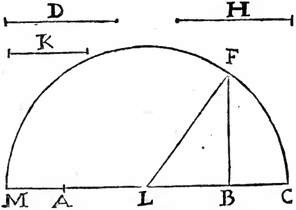


LEM-

LEMMA XVII. PROP. XXIV.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt rectangulum contentum ſub compoſita ex data, & ex producta, & ſub producta, ad quadratum alterius lineæ datæ, ſit in data proportione.

DAtæ duæ lineæ ſint AB, & D. Oportet taliter producere AB, in C, vt rectangulum ACB, ſit ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea,



quam habet AB, ad H. Fiat ergo, vt H, ad AB, ſic D, ad K; & inter D, K, inueniatur media BF, quæ excitetur normaliter ſuper BA, à puncto B; & diuiſa AB, bifa-

bifariam L; & ducta L F, centro L, interuallo L F, describatur ſemicirculus; & A B, protrahatur hinc inde, donec occurrat ſemicirculo in punctis M C. Dico punctum C, vel punctum M, eſſe quæſitum. Duo enim rectangula D, K, & M B C, ſunt æqualia, quia ſunt æqualia eidem quadrato B F. Sed rectangulũ M B C, eſt æquale rectangulo A C B, quia M A, eſt æqualis B C, & M B, eſt æqualis A C. Ergo etiam rectangulum D, K, erit æquale rectangulo A C B. Sed rectangulum D, K, eſt ad quadratum D, vt K, ad D. Ergo, & rectangulum A C B, eſt ad quadratum D, vt K, ad D; nempè, vt A B, ad H, (factum eſt enim ſupra conuertendo, vt A B, ad H, ſic K, ad D.) Quod erat faciendum.

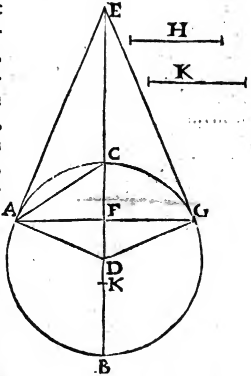
PROBL. VIII. PROP. XXV.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ſupra, vt ſuperficies coni E A G, ſit ad ſuperficiem coni A D G, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet B D, ad H, quæ continuetur ad K, adeò vt ſit, vt B D, ad H, ſic H, ad K. Per Lemma autem antecedens, data B C, taliter continuetur in E, vt rectangulum B E C, ſit ad quadratum ſemidiametri A D, vt B D, ad K; & à pun-

cto E, ducatur tangens E A, & à puncto contactus A, ducatur A F G, normalis C B; & intelligantur coni E A G, A D G, vt in ſchemate. Aio iſtos eſſe quæſitos.

Quoniam enim, vt B D, ad K, ſic rectangulum B E C, nempè, quadratum E A, ei æquale, ad quadratum A D; & , vt B D, ad K, ſic quadratum B D, ad quadratum H; quare, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, ſic quadratum E A, ad quadratum A D. Vnde, & vt B D, ad H, ſic erit E A, ad A D. Sed vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; & vt rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; ſic, ex Archimede, ſupra citato, ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G; quare, & vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

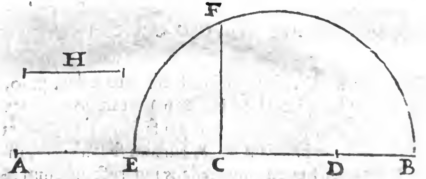


LEM-

LEMMA XVIII. PROP. XXVI.

Datam rectam lineam sectam in duas partes æquales, rursùm ipsam secare in partes inæquales, vt rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum; ad quadratum segmenti intermedij, sit in data proportione.

DAta recta linea sit AB, secta bifariam in puncto C, & data proportio sit, quam habet AC, ad H.



Oportet ipsam taliter diuidere in puncto D, vt rectangulum ADB, sit ad quadratum DC, vt AC, ad H. Fiat vt AC, cum H, ad H, sic AC, ad CE; & super diametro EB, facto semicirculo, à puncto C, erigatur perpendicularis CF, quæ erit minor CB. Fiat ergo CF, æqualis CD. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum eſt, vt A C, cum H, ad H, ſic A C, ſeù ei æqualis B C, ad C E; & vt B C, ad C E, ſic quadratum B C, ad quadratum C F, ſeù ad quadratum C D, ei æquale. Ergo, & vt A C, cum H, ad H, ſic quadratum B C, ad quadratum C D. Et diuidendo, vt A C, ad H, ſic exceſſus quadrati B C, ſuper quadratum C D, ad quadratum C D. Sed talis exceſſus eſt æqualis quadrato D B, & duobus rectangulis C D B, quæ omnia faciunt rectangulum A D B. Ergo, & vt A C, ad H, ſic rectangulum A D B, ad quadratum D C. Quod erat faciendum.

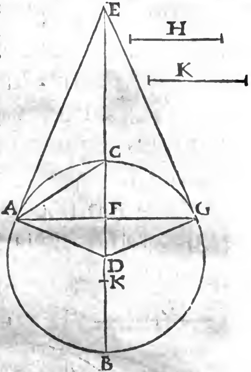
PROBLEMA IX. PROP. XXVII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem.

SIT pariter, vt in ſuperiori Problemate, data ratio, quàm habet B D, ad H; & pariter ſit continuata ad tertium terminum K, vt ſuprà factum eſt; & data recta B C, ſecta bifariam in D, rursùm ſecetur in F, inter C, D, (per Lemma antecedens) vt rectangulum B F C, ſit ad quadratum F D, vt D B, ad K; & à puncto F, acta, more ſolito, normali A F G, & à puncto A, tangente A E, & intellectis conis E A G, A D G. Dico iſtos eſſe quæſitos. Nam cùm factum ſit, vt B D, ad K, ſic rectangulum B F C, ſeù quadratum A F, ei æquale, ad quadratum F D; & cum ſit, vt B D, ad K, ſic

qua-

quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt quadratum B D, ad quadratum H, ſic quadratum A F, ad quadratum F D; & vt linea B D, ad lineam H, ſic A F, ad F D. Sed vt A F, ad F D, ſic (propter ſimilitudinẽ triangulorum E A F, A F D,) E A, ad A D. Et vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectágulum D A F. Vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ità eſt ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiẽ coni D A G.



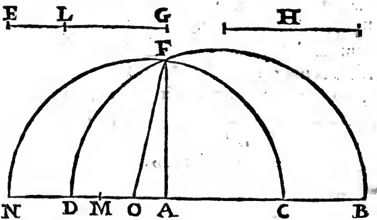
Ergo, à primo ad vltimum, erit vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

(∴)

LEM-

LEMMA XIX. PROP. XXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub vno segmento; vna cum rectangulo sub segmentis, ad quadratum alterius segmenti, vna cum rectangulo sub hoc eodem segmento, & sub indiuisa, sit in data proportione.

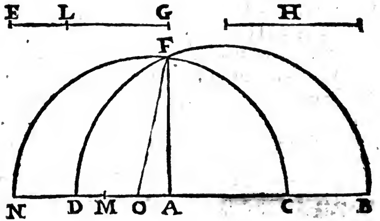


DAtæ duæ rectæ lineæ sint A B, & E G. Oportet A B, taliter diuidere in C, vt rectangulum A B C, cum rectangulo A C B, sit ad quadratum A C, vna cum rectangulo contento sub A C, & sub E G, sit

fit in data proportione, quæ fit ea, quàm habet A B, ad H. Fiat ergo, vt A B, cum H, ad H, fic B A, ad A D, ei pofitam in directum; & fuper diametrum D B, fiat femicirculus; & à puncto A, erigatur A F, occurrens periphæriæ in puncto F. Pariter fiat, vt B A, cum H, ad H, fic E G, ad G L; & E L, fiat æqualis A M, quæ diuifa bifariam in O, & iuncta O F; centro O, interuallo O F, defcribatur femicirculus N F C, fecans A B, in C, (fecabit enim, quia cum D A, fit minor A B, etiam F A, erit minor A B. Cùm verò O F, fit minor duabus O A, A F, erit multò minor duabus O A, A B, nempè O B.) Dico punctum C, effe quæfitum. Quoniam enim rectangula N A C, B A D, funt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato A F; & rectangulo N A C, eft æquale rectangulum M C A, quia N M, A C, funt æquales; & rectangulum M C A, eft æquale rectangulo M A C, & quadrato A C; ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo M A C, & quadrato A C. Sed, cum M A, facta fit æqualis E L; ergo rectangulum M A C, erit æquale rectangulo contento fub E L, & A C. Ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo fub E L, in A C, & quadrato A C. Quare communi addito rectangulo fub L G, in A C; rectangulum B A D, cum rectangulo fub L G, in A C, erit æquale rectangulo fub E G, in A C, vna cum quadrato A C. Quod feruetur.

Verùm, quoniam factum eft, vt B A, cum H, ad H, fic B A, ad A D; & cum fit, vt B A, ad A D, fic qua-

quadratum B A, ad rectangulum B A D, (sumpta eadem altitudinem A B.) Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, ad rectangulum B A D.



Pariter cum factum sit, vt B A, cum H, ad H, sic E G, ad G L; & vt E G, ad G L, cum ita sit (sumpta communi altitudine A C,) rectangulum E G, A C, ad rectangulum G L, A C; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Ergo in eadem proportione B A, cum H, ad H, habemus, tàm quadratum A B, ad rectangulum B A D, quàm rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Quare, & vt B A, cum H, ad H, sic erunt ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, cum rectangulo E G, A C, ad rectangulum B A D, cum rectangulo L G, A C. Sed cum rectangulis B A D, & L G, & A C, ostensa sint æqualia rectangulum E G, A C, & quadratum A C. Ergo quadratum B A, cum rectangulo E G, A C, ad hæc

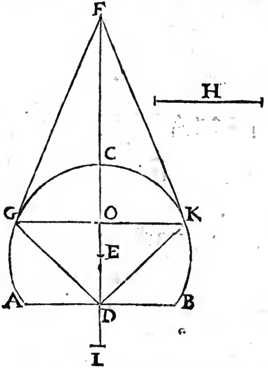
habe-

habebit eandem proportionem. Quare, & vt BA, cum H, ad H, sic quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quare, & diuidendo, erit vt AB, ad H, sic excessus quadrati BA, & rectanguli EG, AC, super quadratum AC, & super rectangulum EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Sed talis excessus est æqualis rectangulis ABC, & ACB, vt consideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, sic rectangula ABC, ACB, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X. PROP. XXIX.

Data portione sphæræ maiori hemisphærio, producere eius axim in puncto ad partem verticis portionis, vt ab ipso puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpendiculari ad axem, & linea ad centrum basis portionis, & ex istis triangulis reuolutis circa axim, facto rhombo, coni rhombi sint ad inuicem in data proportione.

DAta portio ſit A C B, maior hemiſphærio, cuius axis ſit C D, centrũ ſphæræ E; data verò proportio ſit, quàm habet C D, ad H. Oportet producere D C, in F, vt à puncto F, ducta tangente F G, & à puncto G, ductis perpendiculari G O, & G D, ad centrum baſis portionis, & ex reuolutione, facto rhombo F G D K; conus F G K, ſit ad conum G D K, vt C D, ad H. Sit



C L, diameter ſphæræ, & datis C E, ſemidiametro, & E D, diuidatur taliter C E, in O, per Lemma antecedens, vt rectangula E C O, E O C, ſint ad rectangulum D E O, cum quadrato O E, nempè ad rectangulum D O E, vt D C, ad H; & per punctum O, erecta perpendicu-

diculari G O K, & à puncto G, ducta tangente G F, intelligantur coni facti consueto modo, F G K, G D K. Dico istos esse quæsitos.

Conus F G K, ad conum G D K, ob eandem basim G O K, est, vt F O, ad O D. Sed ratio F O, ad O D, de foris sumpta O E, componitur ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed vt F O, ad O E, sic quadratum G O, ad quadratum O E, seu rectangulum L O C, æquale quadrato G O, ad idem quadratum O E. Ergo ratio quoque coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed ratio rectanguli L O C, ad quadratum O E, componitur ex rationibus C O, ad O E, & L O, ad O E. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex rationibus C O, ad O E, L O, ad O E, & O E, ad O D. Sed duæ rationes L O, ad O E, & O E, ad O D, faciunt rationem L O, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione C O, ad O E, & L O, ad O D. Sed istæ duæ rationes faciunt rationem rectanguli L O C, ad rectangulum D O E; & rectangulo L O C, sunt æqualia rectangula E C O, E O C, (vt consideranti patet.) Ergo, vt rectangulum E C O, cum rectangulo E O C, ad rectangulum D O E, nempè, vt D C, ad H, sic conus F G K, ad conum D G K. Quod erat faciendum.

LEMMA XX. PROP. XXX.

Sit recta linea A B, secta in duobus punctis C, D. Dico rectangulum A B C, cum rectangulo A C, B D, excedere rectãgulum A D C; rectangulis A B D, A D B.

NAM rectangulum A B C, est æquale duobus rectangulis A B D, & A B, C D; rectangulum verò A B, C D, est æquale duobus rectangulis A D C, & B D C. Ergo rectangulum A B C, excedit rectangu-

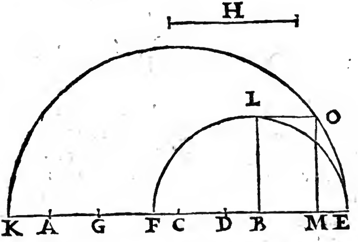


lum A D C, rectangulo A B D, & rectangulo B D C: Sed rectangulum C D B, cum rectangulum A C, D B, facit rectangulum A D B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo A C, D B, excedit rectangulum A D C, duobus rectangulis A B D, & A D B. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XXI. PROP. XXXI.

Datam rectam lineam AB, sectam in puncto C, rursùm ipsam secare in puncto D, inter C, B; vt rectangulum ABD, cum rectangulo ADB, sit ad rectangulum ADC, in data proportione.



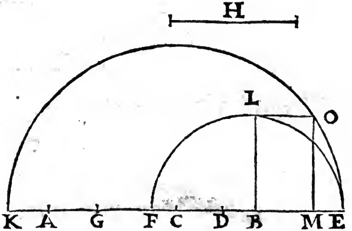
Data proportio sit, quàm habet AB, ad H; & producatur AB, in E, vt BE, sit æqualis BC; & fiat vt AB, cum H, ad H, sic AB, ad AF; & pariter sic BC, ad AG. Rursùm producatur BA, in K, vt KA, sit æqualis GF. Tunc super diametros FE, & KE, fiant semicirculi ad eamdem partem, & à puncto B, erecta BL, perpendiculari occurrente periphæriæ circuli mino-

minoris in L; per punctum L, ducatur L O, parallela K E, occurrens periphæriæ circuli maioris in O; à quo puncto O, dimittatur diametro K E, perpendicularis O M, & ipsi M E, fiat æqualis B D. Dico punctum D. esse quæsitum.

Nam, quoniam quadrata L B, & O M, sunt æqualia, etiam rectangula K M E, & F B E, istis quadratis æqualia, erunt æqualia. Sed rectangulo F B E, est æquale rectangulum F B C, quia B E, facta est æqualis B C; & rectangulo K M E, est æquale rectangulum K M, B D, quia M E, facta est æqualis B D; ergo, rectangulum F B C, erit æquale rectangulo K M, B D, nempè duobus rectãgulis K B D, & M B D, in quæ diuiditur rectangulum K M, D B. At rectangulum M B D, est æquale rectangulo C D B; quia, cum B E, sit facta æqualis C B; & pariter M E, facta sit æqualis D B; ergo reliqua B M, erit æqualis reliquæ C D; & rectangulum M B D, erit æquale rectangulo C D B. Ergo, & rectangulum F B C, erit æquale rectangulis K B D, & C D B; & addito communi rectangulo A F, B C; ergo rectangulum F B C, cum rectangulo A F, B C, nempè totum rectangulum A B C, erit æquale rectangulis K B D; C D B, & A F, C B. Sed rectangulum A B C, diuiditur in duo rectangula, nempè A B D, & A B, C D; & pariter rectangulum K B D, diuiditur in rectangula K A, D B, & A B D. Ergo communi hinc inde ablato rectangulo A B D, remanet ex vna parte rectangulum A B, C D, æquale rectangulis K A, D B, C D B, & A F, C B. Sed quia K A, facta est æqualis G F, rectangulum K A, D B,

erit

erit æquale rectanguto G F, D B; quare rectangulum A B, C D, erit æquale rectangulis G F, D B; C D B, & A F, C B. Rursùm rectangulum A B, C D, diuiditur in rectangula B D C, & A D C; ergo rursùm, communi ablato rectangulo B D C, rectangulum A D C, erit æquale rectangulis G F, D B, & A F, C B. Quod ser-uetur.



Quoniam verò factum eſt, vt A B, cum H, ad H, tàm tota B A, ad totam A F, quàm ablata B C, ad ablatam A G; ergo, & reliqua C A, erit ad reliquam F G, vt tota ad totam, ſeù vt B A, cum H, ad H: at verò, vt B A, ad A F, ſic (ſumpta communi altitudine B C,) rectangulum A B C, ad rectangulum A F, B C; & vt C A, ad F G, ſic (ſumpta communi altitudine D B,) rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B; ergo, & vt B A, cum H, ad H, ſic eſt tàm rectangulum A B C, ad rectangulum A F, C B, quàm rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B. Ergo, & vt B A, cum H, ad

H, ſic

H, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe duo rectangula A B C, & A C, D B, ad duo rectangula A F, C B, & G F, D B, nempe ad rectangulum A D C, quod ſupra, iſtis duobus rectangulis probatum eſt æquale. Ergo, & diuidendo, vt A B, ad H, ſic exceſſus duorum rectangulorum A B C, & A C, D B, ſuper rectangulum A D C, ad rectangulum A D C. Sed iſte exceſſus, in ſuperiori Lemmate probatum eſt æquale duobus rectangulis A B D, & A D B. Ergo, & vt A B, ad H, ſic duo rectangula A B D, & A D B, ad rectangulum A D C. Quod erat faciendum.

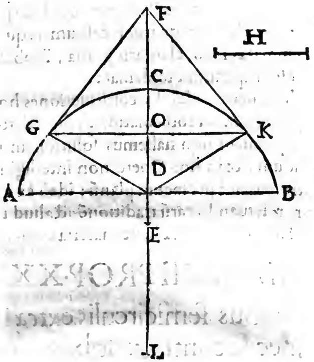
PROBLEMA XI. PROP. XXXII.

Data portione minori hemiſphærio, facere eadem, quæ in ſuperiori Problemate.

SINT data omnia, quæ in ſuperiori Problemate, ſed portio A C B, ſit minor hemiſphærio. Data E C, ſecta in puncto D, rursùm diuidatur in O, inter C, D, vt rectangula E C O, E O C, ſint ad rectangulum E O D, vt E C, ad H; & à puncto O, erecta normali G O K, & à puncto G, tangente G F, intelligantur, (prius ducta G D,) coni F G K, D G K. Quos dico eſſe quæſitos.

Nam eodem diſcurſu, quo factum eſt in ſuperiori Pro-

Problemate, de foris sumpta O E, probabitur conum F G K, ad conum G D K, habere rationem compositam



ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Et eodem modo probabitur, ex istis rationibus componi rationem rectanguli L O C, ad rectangulum E O D. Sed rectangulum L O C, est æquale rectangulis E C O, E O C. Ergo &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVatuor antecedentia Problemata potuissent proponi sub vno tanto Problemate: sed quia in quolibet horum quatuor casuum requiruntur diuersa Lemmata, ideò, claritatis gratia, Problema distinctum est in quatuor Problemata.

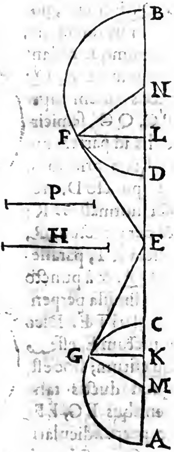
Pariter hic essent tradendæ constructiones horum duorum posteriorum Problematum in superficiebus conicis; sed quoniam non habemus solutionem nisi per locum solidum; & in hoc Opere non intelligimus tradere solutiones, nisi per locum planũ; ideò ex industria omittũtur; reseruando earũ traditionẽ ad aliud tempus, quo, Deo fauente, alia circa hanc materiã conscribemus.

LEMMA XXII. PROP. XXXIII.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quò ductis tangentibus semicirculos, & à punctis cõtactus ductis finibus rectis, abscindant isti sinus versos, seù sagittas, in data proportione.

Sint

SINT dati duo ſemicirculi B F D, C G A, extra ſe poſiti, nec ſe contingentes, quorum diametri B D, C A, ſint vna linea cōtinuata. Oportet in ſegmēto intermedio C D, reperire punctum E, à quo ductis tangentibus E G, E F, & pariter ductis ſinibus rectis G K, F L, abſcindant iſti ſinus verſos K C, D L, in data proportione.

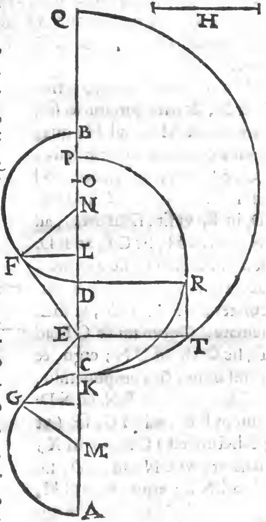


Centra ſemicirculorum ſint M, & N, & data proportio ſit, quàm habet M C, ad H; quæ, vel eſt æqualis ei, quam habet M C, ad D N, vel maior, vel minor. Si ſit æqualis. Diuidatur C D, in E, vt ſit, ſicut M C, ad D N, vel ad H, ſic C E, ad E D. Dico punctum D, eſſe quæſitū. Ducantur tangentes, & perpendiculares, & F N, G M, vt in ſchemate. Quoniam vt C E, ad E D, ſic C M, ad D N; ergo, & permutando, & componendo, vt E M, ad M C, ſic E N, ad N D; vt autem E M, ad M C, ſic (vt ſæpè dictum eſt) C M, ad M K; & pariter, vt E N, ad N D, ſic D N, ad N L; ergo, & vt C M, ad M K, ita D N, ad N L. Ergo & per conuerſionem rationis, vt C M, ad C K, ſic N D, ad D L. Et permutando, vt

H 2 C M,

CM, ad N D, seù ad H, sic CK, ad DL.

Si verò proportio M C, ad H, sit minor E A, quàm habet M C, ad DN, nempè si H, sit maior N D; fiat D O, æqualis ipsi H; & fiat vt O N, ad N D, sic C M, ad D P, & O D, ad P Q, ipsi D P, positam in directum, vbicumque cadant ista puncta P, Q; factis autem super P C, Q C, semicirculis ad partem oppositam prioribus, & à puncto D, erecta normali D R; & per punctum R, ducta R T, parallela Q A; & à puncto T, dimissa perpendiculari T E. Dico punctum E, esse quæsitum; hoc est, quod ductis tangentibus E G, E F, & perpendicularibus G K, F L, erit, vt M C, ad H, sic K C, ad D L.

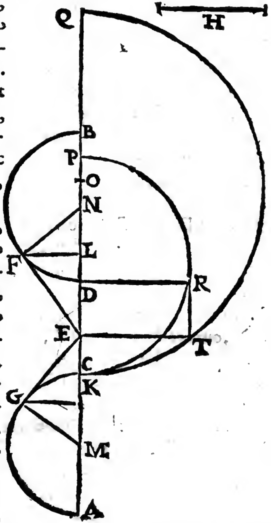


Iam quilibet faciliter proprio Marte potest cognoscere,

ſcere, quadrata D R, E T, eſſe æqualia, ac proinde æquale quoque eſſe rectangulum Q E C, rectangulo P D C. Ergo, vt Q E, ad P D, ſic D C, ad C E. Et diuidendo, vt Q P, cum D E, ad P D, ſic D E, ad E C. Sed (ſumpta communi altitudine O N,) vt Q P, cum D E, ad P D, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum P D, O N. Ergo, vt D E, ad E C, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum D P, O N. Sed rectangulum Q P, O N, eſt æquale rectangulo O D N, (quia ſupra factum eſt, vt O N, ad N D, ſic O D, ad P Q.) Et pariter rectangulum D P, O N, eſt æquale rectangulo N D, C M, (quia pariter factum eſt ſupra, vt O N, ad N D, ſic C M, ad D P.) Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D N, cum rectangulo N O, D E, ad rectangulum N D, C M. Sed vt D E, ad E C, ſic eſt (ſumpta communi altitudine N D,) rectangulum E D N, ad rectangulum N D, C E. Ergo, & vt D E, ad E C, tàm eſt rectangulum O D N, cum rectangulo O N, D E, ad rectangulum N D, C M, quàm rectangulum N D E, ad rectangulum N D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe rectangula O D N; N O, D E, & N D E, ad rectangula N D, C M, & N D, C E. Sed rectangula O D N; N O, D E, & N D E, faciunt rectangulum O D, N E. Et pariter rectangula N D, C M, & N D, C E, faciunt rectangulum N D, E M. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M. Quod ſeruetur.

Rur-

Rursùm vt D E, ad E C, ſic (ſumpta cõmuni altitudine M C,) rectangulum D E, M C, ad rectangulum E C M; ergo & vt rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M, ſic rectangulum D E, C M, ad rectangulum E C M. Et permutando, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulũm D E, C M, ſic rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M. Sed, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulũ D E, C M, ſic rectangulum O D N, ad rectangulum D L, M C, (vt ſtatim oſtendetur.) Et vt rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M, ſic rectangulum N D, M C, ad rectangulum



M C K, (vt pariter ſtatim oſtendetur.) Ergo, & vt rectangulum O D N, ad rectangulum D L, C M, ſic rectangulum

ulum N D, C M, ad rectangulū M C K. Et permutando, vt rectangulū O D N, ad rectangulū D N, C M, nempe, vt O D, ad C M, sic rectangulum D L, C M, ad rectāgulum M C K, nempè, D L, ad C K. Ergo, & conuertendo, t M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod &c.

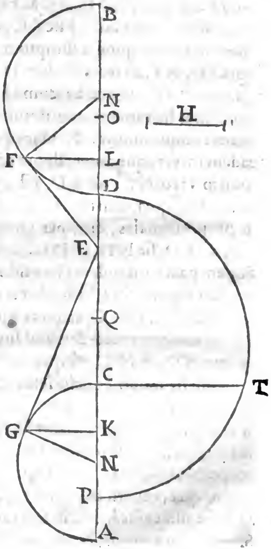
Primum autem, quod assumptum est, nempè rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, esse, vt rectangulum O D N, ad rectāgulum D L, C M: patet, quia proportiones horum rectangulorum ex ijsdem proportionibus componuntur. Nam proportio D O, ad C M, st eadem in vtroque antecedente ad suum consequens. Proportio verò N E, ad E D, est æqualis proportioni D N, ad D L; quia, cum tres E N, N D, & N L, sint continue proportionales, erit, per conuersionem rationis, vt N E, ad E D, sic N D, ad D L.

Eodem pacto ostendetur secundum assumptū, nempe esse, vt rectangulū N D, M E, ad rectangulum E C M, sic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K. Nam pariter in vtroque antecedenti ad suum consequens, est proportio N D, ad M C, reliqua verò proportio M E, ad E C, eodem modo concludetur æqualis proportioni M C, ad C K.

Si verò proportio data maior sit ea, quam habet M C, ad D N; nēpè si H, est minor D N. Fiat ei æqualis D O; & fiat, vt N O, ad N D, sic vtraque simul O D, & C M, ad aliam; quæ, vel erit æqualis D C, vel maior, vel minor; & sic iste casus habebit tres casus.

Sit primum æqualis; & diuidatur D C, in Q, in partes consequentes proportionis; nēpè sit, vt N O, ad N D, sic

sic MC, ad CQ, & DO, ad DQ; & ipsi CQ, fiat æqualis CP; & super diametro DP, fiat semicirculus DTP, ad partem oppositã prioribus; ac à pũcto C, erigatur normalis CT. Patet CT, maiorem esse CP, seù CQ, & minorem CD. Fiat ei æqualis CE. Dico punctum E, esse quæsitum. Sint ergo ductæ tangentes, & perpendiculares, vt in schemate. Quoniam tres PC, CT, & CD, sunt continue proportionales. Ergo, & tres CQ, CE, & CD, eis æquales, erunt continue proportionales. Quare erit, vt DC, ad CE, sic CE, ad CQ. Et diuidendo, vt DE, ad EC, sic EQ, ad QC. Et vt vnum ante-



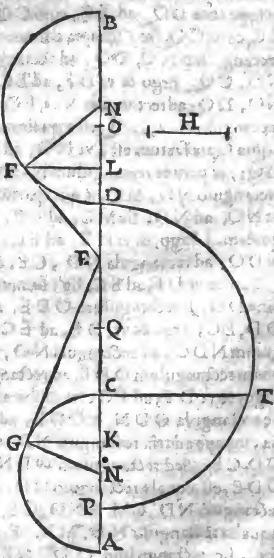
ceden-

edentium ad vnum consequentium, nempe vt D E, ad
E C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia,
nempe tota D Q, ad E C, cum C Q. Sed vt D Q, ad
E C, cum C Q, sic (sumpta communi altitudine N O,)
rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, &
N O, C Q. Ergo & vt D F, ad E C, sic rectangulum
N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Sed
rectangulo N O, D Q, est æquale rectangulum N D O,
(quia supra factum est, vt N O, ad N D, ita D O, ad
D Q;) & pariter rectangulum N O, C Q, est æquale
rectangulo N D, M C; (quia pariter supra factum est,
vt N O, ad N D, sic M C, ad C P, seu ad C Q, ei æ-
qualem.) Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum
N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M.

Pariter vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitu-
dine D O,) rectangulum O D E, ad rectangulum
O D, E C; ergo & vt D E, ad E C, sic est tam rectan-
gulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M,
quàm rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C.
Ergo, & vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia, nem-
pe rectangula O D N, & O D E, ad ambo consequen-
tia, nempe ad tria rectangula N D, C M; N O, C E; &
O D, C E. Sed rectangulum O D N, cum rectangulo
O D E, est æquale rectangulo O D, N E; & pariter tria
rectangula N D, C M, & N O, C E, & O D, C E, sunt
æqualia rectangulo N D, M E. Ergo, & vt D E, ad
E C, sic rectangulum O D, N E, ad rectangulum
N D, M E.

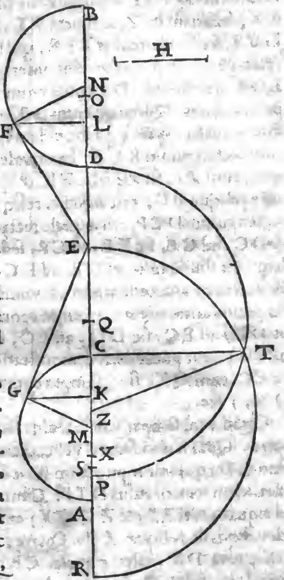
Rursum, vt D E, ad E C, sic (sumpta communi alti-

tudine CM,) rectangulum *D*E, C M, ad rectangulum E C M. Ergo, & vt rectangulũ O *D*, N *E*, ad rectangulũ *N D*, M E, sic rectangulũ *D* E, M C, ad rectangulum E C M. Et permutando, vt rectangulum O *D*, *N* E, ad rectangulũ *D* E, C M, sic rectangulum *N D*, M E, ad rectangulũ E C M. Sed, vt rectangulũ O *D*, *N*E, ad rectangulũ D E, C M, sic rectangulum O *D N*, ad rectangulum *D* L, C M, vt patet ex probatione superiori primi assumpti; & vt rectangulum N *D*, M E, ad rectangulum E C M, sic rectangulum *N* D, M C, ad rectangulum M C K, vt patet ex probatione secundi assumpti.



Ergo

Ergo, & vt rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, sic rectangulum ND, CM, ad rectangulũ MCK. Et permutando, vt rectangulũ ODN, ad rectãgulũ ND, MC, nempe, vt DO, ad MC, sic rectangulum DL, CM, ad rectangulum MCK, nempè sic DL, ad CK. Quare, & conuertendo, vt MC, ad DO, seù ad H, sic KC, ad DL. Quod erat faciendum.



SI autem illa alia sit maior DC. Sit hæc DX; & pariter DX, distinguatur in Q, in partes proportionales, nempè fiat, vt NO, ad ND, sic tàm OD, ad DQ, quã MC, ad QX. & ipsi QX, fiat æqualis CP, vbicumque cadant tria

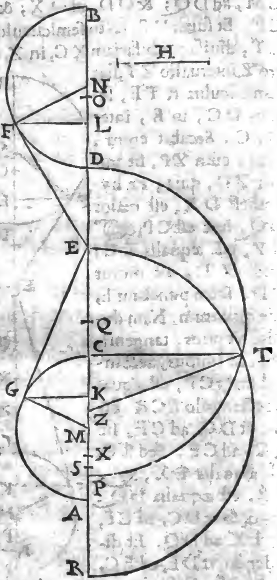
 pun-

puncta Q, X, P. Deinde super diametrum D P, fiat semicirculus D T P; & erigatur normalis C T, ac diuisa C X, bifariam in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus E T R, qui semper secabit D C, inter puncta D, C, vt patebit inferius. Dico punctum E, esse quæsitum. Ducantur enim tangentes, & perpendiculares. Quoniam enim rectangula D C P, E C R, sunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato C T; & cùm rectangulum R C E, sit æquale rectangulo X E C, quia, cum Z E, sit æqualis Z R, & Z X, sit æqualis Z C, ergo reliqua E C, erit æqualis reliquæ X R. Ergo, & rectangulum D C P, erit æquale rectangulo X E C. Ergo vt D C, ad C E, sic X E, ad C P, seu ad Q X, ei æqualem. Et diuidendo, vt D E, ad E C, sic E Q, ad Q X. Et vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; nempè, vt D E, ad E C, sic D Q, ad E C, cum Q X. In reliquis sequatur præcedens demonstratio, nempe, vt D Q, ad E C, cum Q X, sic (sumpta communi altitudine, O N,) &c.

Quòd verò semper semicirculus secet D C, inter C, D, patet. Quia si non secat, vel cadit in D, vel vltra D? Non in D; quia tunc punctum R, esset idem, ac P; & esset idem semicirculus D T P. Cùm ergo tota Z D, esset æqualis toti Z P; & Z C, Z X; ergo, & reliqua D C, esset æqualis reliquæ X P. Quare, addita communi C X, tota D X, esset æqualis C P. Quod implicat; quia C P, facta est æqualis tantum Q X, quæ est pars D X. Maius absurdum concluderetur si punctum E,

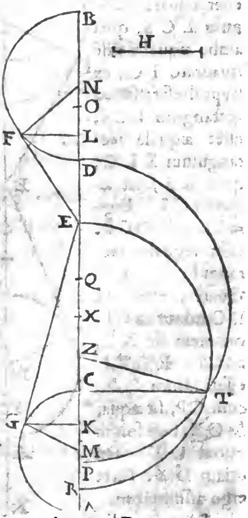
cade-

caderet vltra D, v. b. in L; quia tunc punctum R, caderet vltra P, putà in S; & tunc rectangulum D C P, esset æquale rectãgulo L C S, quia ambo æqualia eidẽ quadrato T C, ex hypothesi falsa. Sed rectangulo L C S, esset æquale rectangulum X L C, quia X S, est æqualis C L. Ergo rectangulũ D C P, esset æquale rectangulo X L C. Quare, esset, vt D C, minor ad C L, maiorem sic X L, ad C P. Ergo X L, esset minor C P; cum C P, sit æqualis Q X, non solùm minor L X, sed etiam D X. Patet ergo assumptum.



SI tandem illa alia sit minor D C, Sit hæc D X; & distinguatur in Q, in

Q in partes proportionis, vt sit sicut N O, ad N D, sic C M, ad D Q; & O D, ad Q X; & D Q, fiat æqualis C P. Et super D P, facto semicirculo, & erecta normali C T, diuisaque bifariam X C, in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus R T E, secans D C, in E, inter D, C. Secabit enim, quia, cùm Z P, sit minor Z D, quia, ex hypothesi D X, est maior D Q, hoc est C P; & X Z, est æqualis Z C; vnde Z T, est minor Z D. Dico punctum E, esse quæsitum. Nam ductis, vt prius, tangentibus, & sinibus; rectangulum D C P, est æquale rectangulo E C R. Ergo, vt D C, ad C E, sic R C, ad C P. Sed R C, est æqualis E X, & C P, est æqualis D Q. Ergo, & vt D C, ad C E, sic E X, ad D Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C, sic excessus X E, super D Q, ad D Q. Et vt vnum antecedentium, ad vnum consequentium, ita omnia ante-



tece-

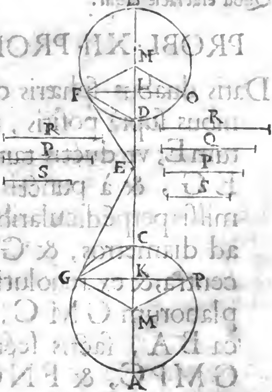
tecedentia, ad omnia consequentia; nempe, vt D E, ad E C, sic excessus D X, super D Q, nempè Q X, ad D Q, cum E C. Sed, vt Q X, ad D Q, cum E C, sic (sumpta communi altitudine O N,) &c. vt suprà factum est, & concludetur propositum. Factum est ergo in omnibus casibus, vt M C, ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. XXXIV.

Datis duabus sphæris cum conditionibus suprà positis, reperire punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & à punctis contactus dimissis perpẽdicularibus F L, G K, ad diametros, & G M, F N, ad centra; & ex reuolutione sectorum planorum G M C, F D N, circa B A, factis sectoribus solidis G M P C, & F N O D; isti sint ad inuicem in data proportione.

DAta proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt C M, ad D N, sic R, ad Q; & pariter fiat, vt R, ad Q, sic Q, ad P. Deinde (intellectis prius sphæris

ris sectis per axem more solito) per Lemma antecedens, inueniatur punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & perpendicularibus G K, F L, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L; & intelligantur sectores, vt in schemate. Dico punctum E, esse quæsitum. Cùm enim factum sit, vt R, ad Q, sic M C, ad D N; ergo, vt quadratum R, ad quadratum Q, nempe, vt R, ad P, sic quadratum M C, ad quadratum D N. Verùm, cùm proportio R, ad S, componatur ex proportione R, ad P, & P, ad S; & vt R, ad P, sic sit quadratum M C, ad quadratum D N; & vt P, ad S, sic K C, ad D L. Ergo proportio R, ad S, componetur quoq; ex proportione quadrati



M C, ad quadratum D N, hoc est ex dupla proportione M C, ad D N, & ex proportione K C, ad D L. Sed vt vna proportio M C, ad D N, sic A C, dupla C M, ad D B, duplam D N. Ergo proportio R, ad S, componetur ex triplici proportione, nempe ex proportione

M C,

MC, ad DN, ex proportione AC, ad DB, & ex proportione KC, ad DL. Sed proportiones AC, ad DB, & KC, ad DL, faciunt rationē rectanguli ACK, ad rectangulum BDL; nempe (ductis GC, FD) quadrati GC, ad quadratum FD. Ergo proportio R, ad S, componetur ex proportione quadrati GC, ad quadratum FD, & ex proportione MC, ad DN. Sed hæ duę proportiones componunt rationem ſectoris GMPC, ad ſectorem NFDO, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de Sphæra, & Cylindro propoſ. 42. & ex noſtra prima propoſitione huius. Ergo, vt R, ad S, ſic ſector GMPC, ad ſectorem FDON. Quod erat faciendum.

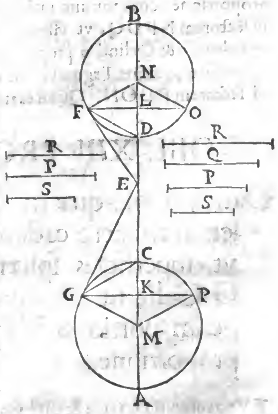
PROBL. XIII. PROP. XXXV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica portionis GCP, ſit ad ſuperficiem ſphæricam portionis FDO, in data proportione.

IVngantur FD, GC; & data proportio ſit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt AC, ad DB, ſic R, ad P, &, per propoſitionem 33. diuidatur CD, in E, vt factis omnibus, quæ ibidem, ſit, vt P, ad S, ſic KC, ad DL;

K &

& reuolutis omnibus, & factis portionibus G C P, F D O. Dico esse quæsitas. Nam proportio R, ad S, componitur ex proportione R, ad P, & ex proportione P, ad S; vt autem R, ad P, sic A C, ad D B; & vt P, ad S, sic K C, ad D L; ergo quoque proportio R, ad S, componetur ex proportione A C, ad D B, & K C, ad D L, nempe, ex proportione rectanguli A C K, ad rectangulum B D L, (cum proportiones horũ rectãgulorum componantur ex ijsdem proportionibus) ergo, vt R, ad S, sic rectãgulum A C K, ad rectangulum B D L, nempè, sic quadratũ G C, ad quadratum F D; nempè, sic superficies sphærica portionis G C P, ad superficiem sphęricã portionis F D O; vt elicitur ex Archimede primo, de Sphæra, & Cylindro proposit. 40, & 41. Ergo factum est, quod faciendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

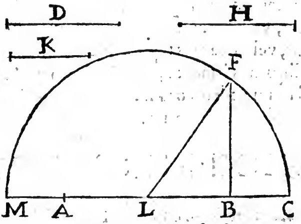
Mvlta alia Problemata essent soluenda circa hanc materiam; sed quia eorum solutiones non tenemus, nisi, vel confusas, vel per locum solidũ; & cùm in præsenti, vel careamus tẽpore ipsas distinguendi, vel non intelligamus tradere, nisi Problemata soluta per locum planum; ideò eorum solutiones ad aliud opus, quod, Deo fauente, imprimetur, remittimus.

LEM. XXIII. PROP. XXXVI.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data cum producta, vna cum quadrato productæ, & cum rectangulo contento sub tota cum producta, & sub producta, sit ad quadratum alterius datæ lineæ in data proportione

Datæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; & data proportio sit, quàm habet A B, ad H; oportet producere A B, in C, vt quadratum A C, cum quadrato C B, & cum rectangulo A C B, sit ad quadratum D, vt A B, ad H. Patet proportionem A B, ad H, debere esse

maiorem ea, quàm habet quadratum A B, ad quadratum D. Fiat, vt H, ad tertiam partem A B, sic quadra-



tum D, ad quadratum K. Patet faciliter, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius esse tertia parte quadrati AB. Erigatur ergo à puncto B, linea B F, perpendiculariter super A B, quæ possit excessum quadrati K, super tertiam partem quadrati A B; & secta A B, bifariam in L, & iuncta L F; centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in punctis M, C. Dico punctum C, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula M B C, & A C B, sunt æqualia, & rectangulum M B C, est æquale quadrato F B; ergo rectangulum A C B, erit æquale quadrato B F. Et addita communi tertia parte quadrati A B, ergo rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B, erit æquale quadrato B F, cum tertia parte quadrati A B, nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem rationem. Sed quadratum D, factum est

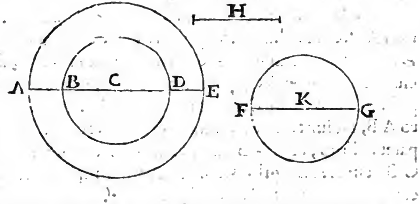
est ad quadratum K, vt H, ad tertiam partem A B. Ergo, & vt H, ad tertiam partem A B, sic quadratum D, ad rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B. Ergo, & ad consequentium tripla, nempe, vt H, ad A B, sic quadratum D, ad quadratum A B, & ad tria rectangula A C B. Et conuertendo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum tribus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed tria rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt quadratum A C, quadratum C B, & vnum rectangulum A C B; nam duo rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt duo quadrata A C, C B, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Producta est ergo A B, in C, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XIV. PROP. XXXVII.

Data sphæra, & data recta linea, describere orbem solidum, cuius crassities sit data linea, qui ad spheram datam, sit in data proportione possibili.

HOC Problema est determinatum, & determinatio, quæ patebit ex processu demonstrationis, est, quod proportio data sit maior ea, quam habet cubus

bus datæ lineę, ad cubum ſemidiametri ſphæræ datæ. Sit data ergo ſphæra, cuius ſemidiameter F K, &c. data recta linea ſit A B, & oporteat facere, quod proponitur. Data proportio ſit, quàm habet A B, ad



H; & data linea A B, taliter producatur in C, vt ſit, ſicut F K, ad H, ſic quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Patet enim, ex determinatione Problematis, quod A B, poterit produci, cum proportio F K, ad H, maior ſit ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Nam ſi eſſet æqualis; cum proportio A B, ad H, componatur ex proportione A B, ad F K, & F K, ad H; vt autem F K, ad H, cum ſic ſit, ex ſuppoſitione, quadratum A B, ad quadratum F K. Ergo proportio A B, ad H, componeretur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadrati A B, ad quadratum F K, quæ duæ faciunt rationem cubi A B, ad cubum F K; quod eſt contra determinationem Problematis; quia proportio A B, ad H, ſtatuitur maior ea, quàm habet cubus A B, ad cubum F K.

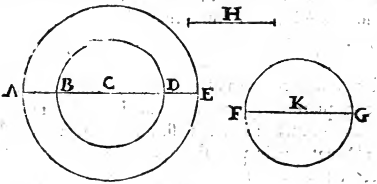
Et

Et multò maius abſurdum concluderetur, ſi proportio eſſet minor. Nam,eodem diſcurſu, concluderetur proportionem A B, ad H, minorem eſſe proportione cubi A B, ad cubum F K. Centro igitur C, interuallis A C, C B, deſcribantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus reuolutis circa diametros, deſcriptæ erunt duæ ſphæræ, quarum diametri itidem A E, B D. Si ergo intelligamus à maiori ablatam eſſe minorem, cuius diameter B D, patet relinqui orbem, cuius craſſities eſt A B. Aſſero eſſe quæſitum.

Etenim proportio A B, ad H, vt dictum eſt, de foris ſumpta F K, componitur ex proportione A B, ad F H, & F K, ad H. Vt autem F K, ad H, ſic facta ſunt duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Ergo quoque, proportio A B, ad H, componetur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Sed iſtæ proportiones componunt proportionem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K, (vt ſtatim patebit.) Vt autem exceſſus cubi A C, ſuper cubum C B, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram, cuius ſemidiameter F K. (Nam, vt cubus A C, ad cubum B C, ſic ſphæra A E, ad ſphæram B D. Et diuidendo, vt orbis ad ſphæram, ſic exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum B C. Vt autem cubus B C, ad cubum F K, ſic ſphæra B D ad ſphæram F G. Ergo, ex æquali, vt exceſſus cubi A C ſuper cubum B C, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram F G.) Ergo, & vt A B, ad H

ſic

ſic orbis ad ſphæram F G. Quod faciendum proponebatur.



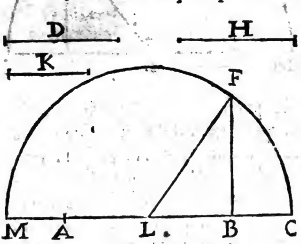
Quòd verò illæ duæ proportiones A B, ad F K, & duorum quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K, componant rationem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K; ſeù, quod factum ſub A B, in duo quadrata A C, C B, & in rectangulum A C B, ſit æquale exceſſui cubi A C, ſuper cubum B C; patet. Quia, duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, diuiduntur in quadratum A B, in tria rectangula A B C, & in tria quadrata B C; in quæ omnia ſi ducatur A B, fient, cubus A B, tria facta ſub A B, in quadratum B C; & tria facta ſub B C, in quadratum A B; nempè exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C. Oſtenſum eſt enim ab alijs, ſed præcipuè ab incomparabili Viro Bonauentura Caualerio Præceptore meo amantiſſimo, libro ſecundo Geometriæ indiuiſibilium Propoſit. 38. quod ſi recta linea ſecta ſit in puncto, cubus totius æquatur cubis partium, & tribus factis ſub qualibet partium in quadratum reliquæ.

Quod

Quòd verò oporteat proportionem datam maiorem esse ea; quam habet cubus A B, ad cubum F K, patuit ex processu Problematis, alioquin non potuisset construi.

LEM. XXIV. PROP. XXXVIII.

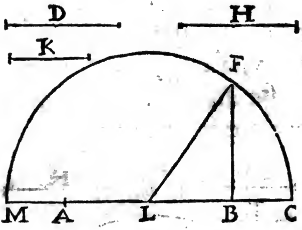
Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data, & producta, vna cum quadrato productæ, sic ad quadratum alterius lineæ datę in data proportione.



Datæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; oportet producere A B, in C, vt duo quadrata A C, C L

sint

ſint ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad H. Patet oportere hanc maiorem eſse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum D. Diuidatur A B, bifariam in L, & fiat, vt H, ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K. Patet, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius eſse dimidio quadrati A B. Nam, ſi non eſſet maius, vel eſset æquale, vel minus. Non æquale; quia, cùm ſit, vt H,



ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K, nempe ad dimidium quadrati A B; eſset, & conuertendo, & vt antecedentium dupla, vt A B, ad H, ſic quadratum A B, ad quadratum D. Quòd eſt contra determinationem. Maius abſurdum concluderetur ſi ſupponeretur quadratum K, minus eſſe dimidio quadrati A B. Ergo cùm quadratum K, maius ſit dimidio quadrati A B, linea potens exceſſum quadrati K, ſuper dimidium quadrati A B, ducatur normaliter ſuper A B, à puncto B,

&

& sit B F; & iuncta L F, centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in M, & C. Dico punctum C, esse quæsitum.

Cùm enim rectangulum M B C, seù A C B, ei æquale, sit æquale quadrato F B, addito dimidio quadrati A B; ergo rectangulum A C B, cum dimidio quadrati A B, erit æquale dimidio quadrati A B, & quadrato F B; nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed quadratum D, ad quadratum K, est vt H, ad L B. Ergo, & conuertendo, erit etiam, vt L B, ad H, sic dimidium quadrati A B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum duobus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed quadratum A B, & duo rectangula A C B, faciunt duo quadrata A C, C B. Quare patet propositũ.

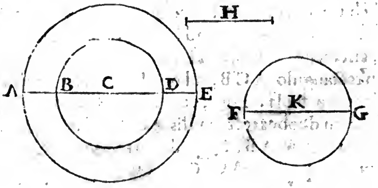
PROBL. XV. PROP. XXXIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter orbis, sit ad superficiem sphærę, in data proportione.

Data proportio sit, vt suprà, quam habet A B, ad H; quàm patebit, ex processu demonstrationis, de-

 bere

bere maiorem esse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Producatur A B, in C, vt duo quadrata A C, C B, sint ad quadratum F K, vt A B, ad H. Vnusquisque, ex dictis in superiori Problemate; & ex determinatione huius, potest elicere, A B, posse produci. Tunc centro C, interuallis A C, C B, describantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus

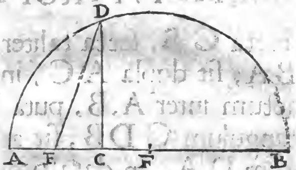


reuolutis circa A E, & intellectis omnibus, vt in superiori Problemate. Aio factum esse propositum. Nam cùm perimeter talis orbis sint duæ superficies sphæricæ, nempè interior, & exterior; superficies verò sphæricæ sint inter se, vt quadrata diametrorum, seù semidiametrorum, vt facilè elicitur ex Archimede primo de sphæra, & Cylindro proposit. 31. erit perimeter orbis, cuius crassities A B, ad superficiem sphæræ, cuius semidiameter F K, vt duo quadrata A C, C B, ad quadratum F K, nempe, vt A B, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXV. PROP. XL.

Diameter A B, ſemicirculi A D B, cuius centrum F, ſit diuiſa taliter in C, vt BC, ſit dupla C A; & erecta à puncto C, perpendiculari CD, ac diuiſa A C, bifariam in E, iunctaque E D. Dico E D, eſſe æqualem F B; & AE, cum E D, eſſe ęqualem toti C B.



QVoniam enim B A, eſt tripla A C, nempe eſt ad ipſam, vt 6, ad 2; ergo A F, dimidia A B, erit ſexquialtera A C, nempe erit ad ipſam, vt 3, ad 2. Ergo F C, eſt æqualis, tàm C E, quàm E A. Pariter, quoniam B C, eſt dupla C A; ergo, & quadratum C D, duplum erit quadrati A C, & erit octuplum quadrati

drati C E. Ergo quadratum D E, erit nonuplum quadrati E C. Sed pariter quadratum A F, seu F B, est nonuplum quadrati E C; ergo quadratum E D, erit æquale quadrato F B, & linea lineæ. Et quia pariter A E, est æqualis C F. Ergo A E, cum E D, erit æqualis C B. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

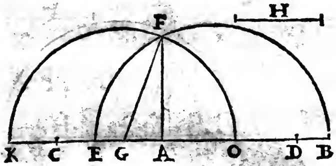
Ex dictis deducitur faciliter, quod si B C, sit maior dupla A C, & fiant reliqua vt suprà; deducitur inquam, duas A E, E D, minores esse C B.

LEMMA XXVI. PROP. XLI.

Data recta C B, secta taliter in A, vt B A, sit dupla A C, inuenire punctum inter A, B, putà D, vt rectangulum C D B, sit ad quadratum D A, in data proportione.

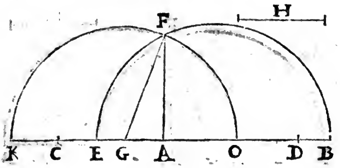
Data proportio sit, quàm habet A B, ad H; & fiat vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic B A, ad A E, quam patet esse minorem dimidia A B; hoc est C A. Facto autem semicirculo super E B, & erecta à pun-

unȼto A, perpendiculari AF, ac diuiſa EA, bifariam
n G, iunȼtaque GF; centro G, interuallo GF, deſcri-
atur ſemicirculus KFO, produȼta AC, vſque ad K.
Quoniam BA, eſt maior dupla AE, & duȼta eſt per-
endicularis AF, & diuiſa eſt EA, bifariam in G,
unȼtaque eſt GF; ergo, per Scholium antecedentis
emmatis, duæ EG, GF, hoc eſt EO, erit minor
AB. Fiat ergo ipſi EO, æqualis AD. Dico punȼtum
), eſſe quæſitum; nimirum eſſe, vt AB, ad H, ſic re-
tangulum CDB, ad quadratum DA.



Quoniam enim duo reȼtangula KAO, EAB, ſunt
æqualia inter ſe, quia ſunt æqualia eidem quadrato
AF; ergo communi addito reȼtangulo KAE, duo re-
tangula KAO, & KAE, nempe reȼtangulum ſub
KA, in EO, erit æquale duobus reȼtangulis EAB,
& KAE. Sed reȼtangulum ſub KA, in EO, eſt æqua-
e quadrato KA, ſeu EO, quia duæ KA, & EO, ſunt
æquales; & quia EO, facta eſt æqualis AD, quadra-
um EO, eſt æquale quadrato AD; ergo quadratum
AD, erit æquale reȼtangulo EAB, & reȼtangulo
KAE.

K A E. Sed rectangulum K A E, est æquale rectangulo A E O, quia, vt dictum est, K A, est æqualis E O. Ergo quadratum A D, erit æquale rectangulis E A B, & A E O, nempe rectangulo sub A E, in compositam ex B A, E O, seu in compositam ex B A, A D. Ergo quadratum B A, simul cum rectangulo D A B, hoc est rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad rectangulum sub E A, in compositam ex B A, A D, est, vt B A, ad A E; & B A, ad A E, facta est, vt dupla A B, cum dupla H, ad H. Ergo, & vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad quadratum A D, nempe sic quadratum A B, cum rectangulo B A D, (quia rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, diuiditur in quadratum B A, & in rectangulum B A D,) ad quadratum A D. Et diuiden-



idendo, vt dupla B A, cum H, ad H; sic quadratum A, cum rectangulo B D A, ad quadratum D A. t rursum diuidendo, vt dupla B A, ad H, sic tria rectangula B D A, cum quadrato D B, ad quadratum D. Et antecedentium dimidia. Ergo, vt A B, ad H, c dimidium trium rectangulorum A D B, & quadrati D B, ad quadratum D A. Sed horum dimidium est rectangulum C D B; nam, dimidium duorum rectangulorum A D B, est vnicum rectangulum A D B; & dimidium rectanguli A D B, cum quadrato D B, nempe rectanguli A B D, est rectangulum C A, D B, quia C A, st dimidia A B. Duo autem rectangula A D B, & C A, D B, sunt æqualia rectangulo C D B. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum A D. Quod erat faciendum.

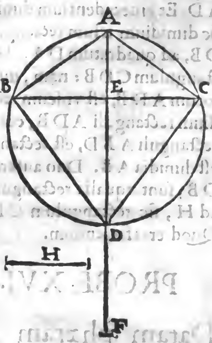
PROBL. XVI. PROP. XLII.

Datam sphæram, aliquo plano taliter diuidere, vt vna illius portio, ad conum super eamdem basim cum portionibus, cuius vertex sit vertex alterius portionis, sit in data proportione.

SIT data sphæra, cuius diameter A D. Oportet ipsam secare plano B E C, cui diameter sit perpendicula-

M

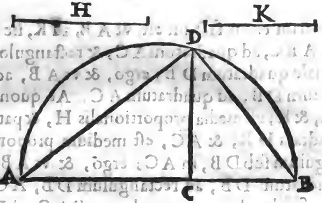
cularis, adeò vt, facto cono, cuius basis sit B E C, & vertex D, portio B A C, sit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, sit dupla D F, diuidatur, per propositionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, sit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, sit normalis, & facto cono B D C, vt moris est. Dico factum esse propositum. Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris sumpto cono B A C,) habet rationem compositam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C, ad conum B D C; sed portio B A C, est ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt ostenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro proposit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, est, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, seu, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.



LEM-

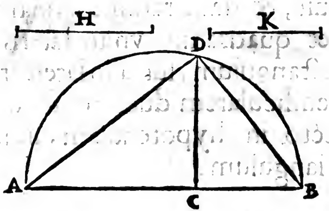
LEMMA XXVII. PROP. XLIII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, sub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenusam, inuenire triangulum.



DAta hypotenusa sit A B, & data ratio sit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, sic H, ad K; deinde super A B, fiat semicirculus, & per propos. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, sit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à pun-

cto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.



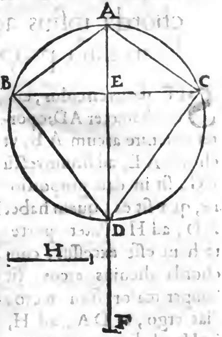
Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergó, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PRO-

PROBL. XVII. PROP. XLIV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis B A C, sit ad superficiem conicam coni B D C, in data proportione.

DAta proportio sit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D A, sphæræ datæ, tamquam ypotenusa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum A D B, t quadratum A B, sit ad rectãgulum D B E, vt D A, d H, & intelligantur, portio B A C, & conus B D C. Dico plano B C, sectam esse sphæram, vt superficies portionis B A C, sit ad superficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res est clara, quia ex Archimede sæpe, sæpius citato, vt quadratũ A B, ad rectãgulum D B E, seu, vt D A, ad H, sic superficies portionis, ad superficiem coni.



SCHO-

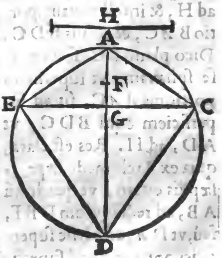
SCHOLIVM.

ARchimedes libro 2. de sphæra, & Cylindro proposit. 7. soluit hoc Problema. A data sphæra portionem abscindere, quæ ad conum super eamdem basim, & in eadem altitudine cum ipsa, habeat datam proportionem. Arbitror non esse inutile soluere Problema etiam quoad superficies.

LEMMA XXVIII. PROP. XLV.

In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipsius ad sinum rectum, sit in data proportione.

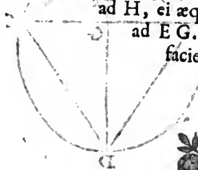
SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad sinum rectũ EG, sit in data proportione, quæ sit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc esse excessus, cum chorda alicuius arcus, sit semper maior sinu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, sic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; sit hæc



DG;

G; & à puncto G, ducantur G E, normalis D A, & chorda E A. Quas assero esse quæsitas. Nam D A, H, & D G, sunt tres continue proportionales. Ergo, vt D A, ad D G, sic quadratum D A, ad quadratum H. Sed pariter; vt D A, ad D G, sic (sumpta G A, communi altitudine,) est rectangulum D A G, nempe quadratum A E, ad rectangulum D G A, nempe ad quadratum E G; ergo, & vt quadratum D A, ad quadratum H, sic quadratum A E, ad quadratum E G. Ergo, & vt D A, ad H, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

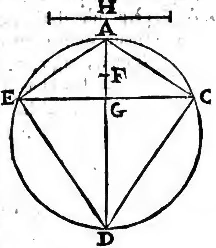
Vel sic. Quoniam H, est minor D A, ex hypothesi, aptetur ei æqualis D E, à puncto D, & ducantur E A, & perpendicularis E G, super diametrum D A. Quoniam duo triangula A D E, A E G, sunt similia; ergo, vt A D, ad D E, seu ad H, ei æqualem, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.



PROBLEMA XVIII. PROP. XLVI.

A data sphæra portionẽ abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter D A, & data proportio ſit, quam habet D A, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur A E, & ducatur perpendicularis E G, vt A E, ſit ad E G, vt D A, ad H; & intelligantur portio, & conus E A C. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum A E, ad rectangulum A E G, nempe, vt A E, ad E G; nempe, vt A D, ad H. Quod erat faciendum.

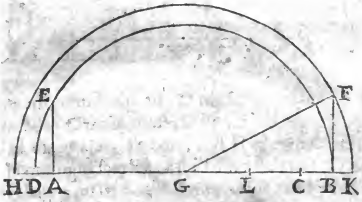


LEM-

LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

Datam A B, taliter ſecare in puncto C, vt duo quadrata A B, B C, ſint ad rectangulum A B C, cum quadrato B C, in data proportione.

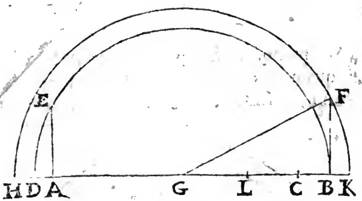
DAta proportio ſit, quam habet A B, ad B L, quàm patet debere eſſe maioris inæqualitatis. Fiat, vt A L, ad L B, ſic B A, ad A D, ei poſitam in di-



rectum; & ſuper diametro D B, fiat ſemicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur A E, normalis ſuper A B, & à puncto B, erigatur pariter normalis B F, æqualis ipſi A E, & ducta G F, centro G, interuallo G F, fiat ſemicirculus, cuius diameter ſit H K, & ipſi B K

fiat æqualis B C, (cum B K, ſit minor B A, vt oſtendetur.) Dico punctum C, eſſe quæſitum.

In primis, quod B K, ſit minor B A, patet; quia, cum duæ A E, B F, ſint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula H B K, D A B, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior H B, ad minorem D A, ſic maior A B, ad minorem B K.



Quòd autem punctum C, ſit quæſitum, ſic probabitur. Iam probatum eſt, rectangulum D A B, eſſe æquale rectangulo H B K, hoc eſt rectangulo H B C, quia B C, facta eſt æqualis B K; ſed rectangulum H B C, quia (cùm H D, ſit æqualis B K, eſt etiam æqualis B C,) eſt æquale rectangulo D B C, & quadrato C B; ergo rectangulum D A B, erit æquale rectangulo D B C, & quadrato B C. At rectangulum D A B, eſt æquale rectangulis D A C, & D A, C B; ergo, & duo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D B C, & quadrato B C. Pariter rectangulum D B C, eſt

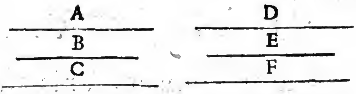
est æquale rectangulo sub D A, in B C, & rectangulo A B C; ergo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D [illegible] C B, rectangulo A C B, & quadrato B C. Quare communi ablato rectangulo sub D A, in C B; rectangulum [illegible] A C, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato C B. ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum B A C, habet eandem proportionem. At rectangulum B A C, ad rectangulum D A C, est vt B A, ad A D, & B A, ad A D, [illegible] est, vt A L, ad L B; ergo, & vt A L, ad L B, sic rectangulum B A C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quare, & componendo, vt A B, ad B L, sic erit rectangulum B A C, cum rectangulo A B C, & cum quadrato B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Sed duo rectangula B A C, & A B C, faciunt quadratum B A. Ergo, & vt A B, ad B L, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

(:)

LEMMA XXX. PRO. XLVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione. Quàm proportionem habebit factum quodcumque ſub quibuslibet magnitudinibus primæ ſeriei, ad factum ſub alijs magnitudinibus eiuſdem ſeriei, ſic factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei antecedentibus homologis, ad factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei homologis conſequentibus, exiſtentibus omnibus factis homogeneis.

REM exemplifico. Sint duæ ſeries; in prima ſint quotcumque magnitudines A,B,C,& in ſecũda aliæ iſtis numero æquales D,E,F, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, nempe ſit, vt A, ad B, ſic D, ad E; & vt B, ad C, ſic E, ad F. Intelligo ergo, quod v. g. quadratum A, cum rectangulo A, B, ſit ad quadratum



dratum C, vt quadratum D, cum rectangulo D, E, ad quadratum F; & sic in altioribus potestatibus, & in factis diuersimode. Res est facilis probatu; quia proportio primi facti ad secundum factum, componitur ex ijsdem proportionibus, ex quibus componitur proportio tertij facti ad quartum factum.

SCHOLIVM.

Ex dictis infertur, quod etiam permutando, vt primum factum in prima serie, ad primum factum in secunda serie, sic secundum factum in prima serie, ad secundum factum in secunda serie, dummodo hæc omnia facta, sint homogenea.

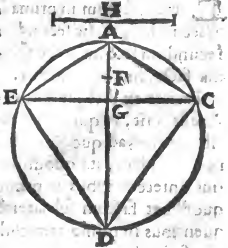
Pariter ex dictis infertur, quod si sint duo triangula similia, erit, vt quodlibet factum sub quibuslibet lateribus vnius, ad quodlibet factum sub quibuslibet lateribus eiusdem, ita quodlibet factum sub lateribus alterius antecedentibus in primo triangulo homologis, ad quodlibet factum sub lateribus alterius, itidem consequentibus in primo triangulo homologis; dummodo hæc facta, sint homogenea. Res est euidens, quia latera duorum triangulorum similium, sunt duæ series trium magnitudinum dispositæ secundum conditionem Lemmatis.

PRO-

PROBL. XIX. PROP. XLIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAtæ sphæræ sit circulus maximus, cuius diameter AD, & data ratio sit, quam habet AD, ad H, quæ debet esse excessus. Diuidatur AD, in F, vt quadratum AD, cum quadrato DF, sit ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, in data ratione AD, ad H, per propositionem 47. Deinde à puncto D, aptetur DE, æqualis DF, & dimissa perpendiculari EGC, & iuncta EA, facta consueta reuolutione, intelligantur portio, & conus EAC. Dico hæc solida esse quæsita. Cùm enim factum sit, vt DA, ad H, sic duo quadrata AD, DF, ad rectangulum ADF, cum quadrato



DF,

F, nempe, (propter æqualitatem D F, D E,) duo uadrata A D, D E, ad rectangulum A D E, cum quarato D E; & cùm (propter ſimilitudinem triangulom A E D, A E G) ſit, vt duo quadrata A D, D E, ad ectangulum A D E, cum quadrato D E, ſic duo quarata A E, E G, ad rectangulum A E G, cum quadra- E G, per Propoſ. anteced., nempe, ex Archimede epe citato, perimeter portionis E A C, ad perimetrum oni E A C. Ergo, & vt A D, ad H, ſic perimeter poronis, ad perimetrum coni. Factum eſt ergo, quod roponebatur.

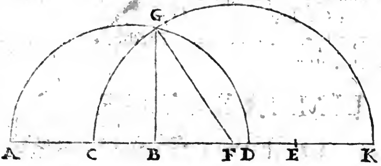
LEMMA XXXI. PROP. L.

Datam rectam lineam taliter ſecare in puncto, vt quadratum totius, ad rectangulum ſub tota, & ſub vno ſegmento, cum quadrato eiuſdem ſegmenti, ſit in data proportione.

DAta recta linea ſit A B, & data proportio ſit, quam habet A B, ad B D, ei poſitam in directum. Patet proportionem datam debere eſſe talis conditionis, vt A B, ſit maior ſubdupla B D, quia ſemper quadratum A B, eſt maius ſubduplo rectanguli A B C, & quadrati B C. Fiat B E, æqualis A B, quæ ſecetur bifa-

bifariam in F; deinde super A D, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B G; & à puncto F, ducatur linea ad punctum G; centro autem F, intervallo F G, describatur semicirculus C G K, qui semper secabit A B, vt patebit inferius. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim rectangulum A B D, & rectangulum



K B C, sunt æqualia inter se, quia æqualia eidem quadrato G B; & quia K E, est æqualis C B, rectangulum K B C, est æquale rectangulo E C B; ergo rectangulum A B D, est æquale rectangulo E C B, nempe rectangulo E B C, & quadrato C B. Sed quoniam E B, est æqualis A B, ergo rectangulum E B C, est æquale rectangulo A B C. Quare, & rectangulum A B D, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato B C. Quare quadratum A B, ad hæc habebit eadem proportionem. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D, est vt A B, ad B D. Ergo, & vt A B, ad B D, sic quadratum A B, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

Quod

Quòd verò assumptum est, nempe semicirculum GK, secare A B; seù F G, minorem esse F A, patet; nia, cùm D B, sit minor dupla B A, ergo, & quadratum G B, erit minus duplo quadrati A B. Ergo quadratum G B, ad quadratum A B, erit in ratione minori, quam 8, ad 4. Et quia B F, cum sit dimidia B A, est quadratum subquadruplum quadrati A B. Ergo duo quadrata G B, B F, nempe quadratum G F, erit ad quadratum A B, in ratione minori, quam 9, ad 4. Sed quadratum A F, est ad quadratum A B, vt 9. ad 4. Ergo quadratum F G, est minus quadrato F A; & consequenter F G, erit minor F A.

PROBLEMA XX. PROP. LI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis E A C, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

PAriter data ratio sit, quam habet A D, ad H, quam infra patebit, debere esse maiorem subdupla. Diuidatur, per Lemma antecedens, A D, in F, vt quadratum A D, sit ad rectangulum A D F, cum quadrato D F, vt A D, ad H. Et pariter, vt supra factum est, aperiatur à puncto D, D E, æqualis D F, & fiant omnia,

vt in antecedenti Problemate, & arguatur congruenti argumentatione, vt ibidem.

Tandem cõcludemus, quadratum A E, ad rectangulũ A E G, cum quadrato E G, esse, vt A D, ad H. Quare patet etiam, superficiem sphæricam portionis E A C, esse ad perimetrum coni E A C, vt A D, ad H.



Quòd verò ratio A D, ad H, debeat esse subdupla. Patet, quia quadratum A E, est maius subduplo rectanguli A E G, cum quadrato E G.

SCHOLIVM.

EX dictis habemus modum, quo soluamus Problema, in gratiam cuius traditum est præsens; nempe. Datis ijsdem, quæ in tribus superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis E A C, intus, & extra, dempto cono E A C, ad perimetrum coni E A C, sit in data proportione. Nam perimeter talis portionis extra, constaret superficie sphærica portionis, & circulo basis; intra verò, superficie conica, supponendo ablato cono, remanere basim. Si ergo fiat, vt excessus A D, super H, ad H, (quia in tali casu proportio data debet esse excessus) sic qua-

dra-

dratum E A, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; erit componendo, vt A D, ad H, sic quadratum A E, cum rectangulo A E G, & cum quadrato E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; nempe, totus perimeter portionis, vt suprà expositæ, ad perimetrum coni.

PROBL. XXI. PROP. LII.

Data sphæræ portione quacumque, reperire conum circa eamdem axim cum portione, vt portio sit ad conum in data proportione.

Licet solutio huius Problematis possit haberi facilissimè ex Archimede, vt patebit; quia tamen possumus ipsum soluere, quamuis difficiliori modo, per quandam propriam propositionem vniuersalem, quam censemus non spernendam; ideò cùm nesciamus hanc aptiori loco collocare; in gratiam nostræ propositionis, soluimus hoc Problema, primò facilissimè ex Archimede postea præmisso proprio Lemmate vniuersali.

Sit ergo datæ sphæræ, cuius diameter B K, centrum L, data portio A B C, cuius axis B D, & data sit proportio, quam habet K B, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiat, vt K D, ad eandem K D,

cum K L, sic D B, ad D G. Ergo, ex Archimede 2. de sphæra, & Cylindro propos. 2. si fiat conus A G C, hic erit æqualis portioni A B C. Fiat ergo, & fiat, vt G D, ad D B, sic K B, ad M; & fiat, vt M, ad H, sic quadratum A D, ad quadratum D E. Facto ergo cono E B F. Dico hunc esse quæsitum.



Nam conus A G C, ad conum E B F, habet rationem compositam ex ratione G D, ad D B, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E, per propositionem primam huius. Sed, vt G D, ad D B, sic facta est K B, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum D E, sic M, ad H. Ergo conus A G C, seù portio A B C, ei æqualis, ad conum E B F, habet rationem compositam ex ratione K B, ad M, & M, ad H. Sed istæ duæ rationes K B, ad M, & M, ad H, faciunt rationem K B, ad H. Ergo, &c. Quod &c.

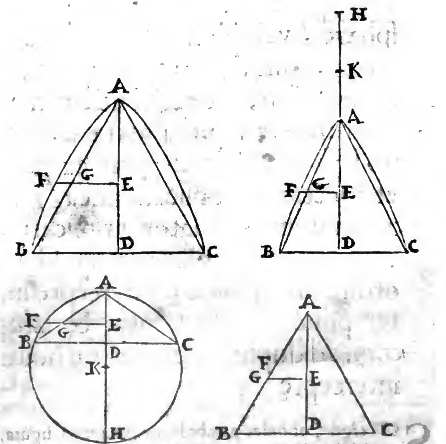
LEM-

LEMMA XXXII. PROP. LIII.

Quodlibet Conoides parabolicum, vel hyperbolicum; quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, & etiam conus, sunt ad conum super eandem basim, & circa eandem diametrum cum ipsis (secta diametro bifariam, & ordinatim ex puncto sectionis applicata linea,) vt quadratum ordinatim applicatæ, cum quadrato portionis eiusdem ordinatim applicatæ interceptæ inter punctum diuisionis, & latus coni, ad duplum quadratum huius interceptæ.

SIT ergo Conoides parabolicum in prima figura, vel hyperbolicum, vt in secunda, vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vt in tertia, vel conus, vt in quarta A B C, cuius diametrum A D; & circa diametrum A D, & super eandem basim B C, sit, in vnaquaque figura, conus B A C; & diameter D A, sit diuisa,

uisa bifariam in E, & per E, sit ducta E F, parallela B D, secans A B, latus coni in G. Dico solidum B A C, esse ad conum B A C, vt duo quadrata F E, E G, ad duo quadrata G, E.



In cono res est euidens, quia est proportio æqualitatis. In portione sphæræ, vel sphæroidis, sit diameter totius sphæræ, vel sphæroidis A H. In conoide hyperbolico, A H, sit diameter transuersa, & in omnibus istis sit centrum K.

Tunc

Tunc in Conoide parabolico. Quoniã ex prim. conic.
op. 20. quadratum B D, est duplum quadrati F E, cum
: ad ipsum, vt D A, ad A E, & est quadruplum qua-
ati G E; ergo quadratum F E, erit duplum quadrati
E; & duo quadrata F E, E G, erunt sexquialtera duo-
ım quadratorum G E; nempe, vt Conoides B A C, est
oni B A C, ex Archimede lib. de Conoid. & Sphæroid.
rop. 23.

In Conoide verò hyperbolico, & in portione sphæ-
e, vel sphæroidis. Quoniam quadratum F E, est ad
uadratum B D, ex primo conic. prop. 21. vt rectangu-
ım H E A, ad rectangulum H D A; & vt quadratum
D, ad quadratum G E, sic rectangulum H D A, ad
ectangulum sub H D, in dimidiam ipsius A E, nempe
d rectangulum sub dimidia H D, in A E. Ergo ex æ-
quali, vt quadratum F E, ad quadratum G E, sic rectan-
gulum H E A, ad rectangulum sub dimidia H D, in
E A, nempe (propter eandem altitudinem A E,) vt H E,
ıd dimidiam H D, quæ est K E, vt consideranti patet.
Ergo, & componendo, vt quadratum F E, cum quadra-
:o E G, ad quadratum E G. sic H E, cum E K, ad E K.
Et ad consequentium dupla. Ergo, vt quadratum F E,
cum quadrato E G, ad duo quadrata E G, sic H E, cum
K E, ad H D. Sed E H, cum K E, facit dimidiam
A H, cum H D, vt consideranti patet; & ex Archime-
de de Conoid. & sphæroid. prop. 31. & 33 Portio B A C,
vel conoides hyperbolicum, est ad conum B A C, vt di-
midia H A, cum H D, ad H D. Ergo portio, vel conoi-
des, est ad conum, vt duo quadrata E G. Quod &c.

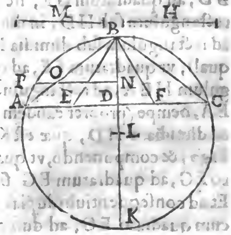
In

In Conoide enim hyperbolico, patet, quod dimidia H A, cum H D, facit sesquialteram H A, cum A D.

PROBL. XXII. PROP. LIV.

Idem.

Diuidatur B D, bifariam in N, & ducatur per punctum N, N O P, parallela A D, secans B A, latus coni in O; & fiat, vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, sic K B, ad M; deinde fiat, vt M, ad H, sic quadratum A D, ad quadratum D E, vbicunque cadat punctum E, & fiat conus E B F. Dico portionem A B C, esse ad conum E B F, vt K B, ad H.



Quoniam enim ratio portionis A B C, ad conũ E B F, de foris sumpto cono A B C, componitur ex ratione portionis ad conum A B C, & coni A B C, ad conum E B F; & vt portio ad conum A B C, sic, per propositionem antecedentem, duo quadrata P N, & N O, ad duo quadrata N O; & vt conus A B C, ad conum E B F, sic quadratum A D, ad quadratum D E.

Ergo

rgo proportio portionis A B C, ad conum E B F, omponetur quoque ex proportione quadratorũ P N, O, ad duo quadrata N O, & ex proportione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed proportio quadratorum P N, N O, ad duo quadrata N O, est eadem ım proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, quia, t dimidium, ad dimidium, sic duplum ad duplum. rgo proportio portionis ad conum E B F, componetur uoque, ex proportione duorum quadratorum P N, cum uobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, seù d quadratum A D, eis æquale, & ex ratione quadrati D, ad quadratum D E. Sed vt duo quadrata P N, um duobus quadratis N O, ad quadratum A D, sic ıcta est B K, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum E D, sic M, ad H. Ergo proportio portionis A B C, d conum E D F, cõponetur ex proportionibus K B, ad M, & M, ad H. Sed ex ijsdem proportionibus componitur ratio K B, ad H. Ergo, vt K B, ad H. Sic porio A B C, ad conum E B F. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

CVM hæc huius Libelli imprimerentur, occasione, qua Proposit. 53. vsi sumus Archimede libro de Conoid. & Sphæroid. prop. 23. in qua demonstrat. Conoides parabolicum ad conum in eadem basi, & circa eandem diametrum cum ipso, esse in proportione sesquialtera, incidimus in modum hoc idem demonstrãdi,

Sed per auream methodum indiuisibilium, quam qui aspernantur, aliam non merentur pœnam, quàm priuari fructu ex tali methodo colligendo. Visum est ergo peroptimum, hunc modum hoc loco explicare, qui vtique est diuersus ab his, quibus vtuntur columnæ herculeæ Geometrarum Italorum nostri sæculi, nimirum Bonauentura Caualerius lib. 4. Geometriæ indiuisibilium, prop. 21. & Euangelista Torricellius in exemplis pro indiuisibilibus curuis, exemplo 14. Ne ergo nostrum ordinem incæptum variemus, trademus hunc modum per duas sequentes propositiones extra ordinem sumptas.

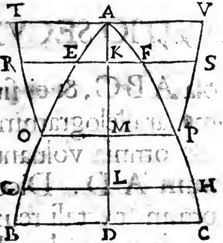
PROPOSITIO PRIMA.

Esto parabola B A C, cuius diameter D A, basis B D C, & in diametro D A, sint sumpta duo puncta K, & L, æque remota à punctis A, & D, per quæ sint ductę ordinatim applicatæ E K, G L. Dico duo quadrata E K, G L, esse æqualia quadrato B D.

Quoniam enim quadratum E K, est ad quadratum B D, vt K A, ad A D; & pariter quadratum

tum

tum GL, est ad quadratum BD, vt LA, ad AD, ex 20. prim. Conic. Ergo, & duo quadrata EK, GL,



erunt ad quadratum BD, vt KA, seu LD, simul cum AL, nempe, vt tota AD, ad AD. Quare æqualia, &c.

SCHOLIVM.

Facilè elicitur ex dictis, quod si AD, diuisa bifariam in M, &, per M, ordinatim applicata OMP, mente concipiamus, frustrum BOPC, parabolæ, rotari super OP, veluti super cardinem, donec collocetur super OAP, adeò vt BDC, sit in TAV, &, DM, congruat AM, & punctum D, congruat ipsi A; puncta verò B, C, congruant ipsis punctis T, V; infertur inquam, quod si in AM, sumatur quodlibet

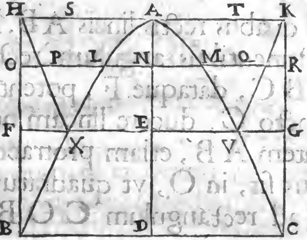
punctum K, per quod ordinatim applicetur R E K F S; ſemper duo quadrata R K, K E, erunt æqualia quadrato N M. Res eſt euidens.

PROPOSITIO SECVNDA.

Sit parabola A B C, & ei ſit circumſcriptum parallelogrammum H B C K, & omnia voluantur circa diametrum A D. Dico Cylindrum ortum ex tali reuolutione, eſſe conoidis parabolici duplum.

SEcetur A D, biſariam in E, & per punctum E, agatur planum F X E V G, parallelum planis H K, B C, & mente concipiamus fruſtum parabolicum B X V C, locari, adeò vt baſis B D C, ſit in H A K, punctum D, ſit in puncto A, & linea D E, ſit ſuper E A, & ſumatur in A E, quodlibet punctum N, per quod agatur planum O P L N M Q R, faciens in Cylindro circulum, cuius radius O N, in portione conoidis X A V, circulum, cuius radius L N, & in fruſto X H K V, circulum, cuius radius P N. Quoniam enim quadratum H A, ſeù O N, eſt æquale quadratis P N, & N L, ex Scholio Propoſitionis antecedentis. Ergo, & circulus, cuius radius O N, erit æqualis circulis, quorum radij

radij P N, N L; & punctum L, sumptum est vtcumque. Ergo omnes circuli Cylindri H F G K, sumpti iuxta



regulam planũ H A K, seù F E G; erunt æquales omnibus circulis frusti HXVK, & portionis X A V, sũptis iuxta eandem regulam. Quare & Cylinder H F G K, erit æqualis frusto HXVK, seù B X V C, & portioni X A V, nempe erit æqualis toti conoidi B A C. Sed Cylinder H B C K, est duplus Cylindri H F G K. Ergo talis Cylinder est duplus conoidis B A C. Quod erat ostendendum.

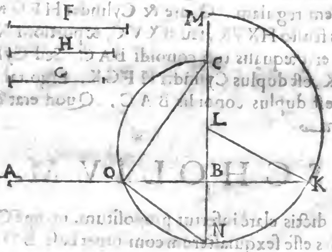
SCHOLIVM.

Ex dictis clarè infertur propositum, nempe Conoides esse sexquialterum coni super base B D C, & circa diametrum A D. Ratio est, quia conus est subtriplus Cylindri, vnde, quorum Cylindrus est sex, & conoides tria, conus erit duo.

LEM-

LEMMA XXXIII. PROP. LV.

Datis duabus rectis lineis A B, B C, continentibus angulum rectum, A B C, dataque F, potentia, à puncto C, ducere lineam occurrentem A B, etiam protractæ, si opus sit, in O, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, in data proportione.



SIT hæc, quàm habet F, ad G; & inter F, & G, sit media proportionalis H; & fiat, vt BC, ad H, sic H, ad BK, positam in directum ipsi A B; sectaque

BC,

B C, bifariam in L, & ducta L K, centro L, interuallo L K, fiat semicirculus, cuius diameter sit M N; & super C N, ex parte opposita, fiat semicirculus N O C secans A B, in O. Dico punctum O, esse quæsitum, nempe ducta C O, esse quadratum F, ad rectangulum C O B, vt F, ad G. Ducatur O N. Quoniam L C, est æqualis L B, & M L, ipsi L N; ergo & M C, est æqualis B N. Ergo quadratum B K, est æquale rectangulo C N B, nempe quadrato N O. Ergo, & linea B K, est æqualis N O. Cùm autem (propter similitudinem triangulorum C O B, N O B) rectangulum C O B, sit æquale rectangulo sub C B, in O N, seu in B K; & rectangulum C B K, sit æquale quadrato H. Ergo & rectangulum C O B, erit æquale quadrato H. Sed quadratum F, ad quadratum H, est, vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum C O B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

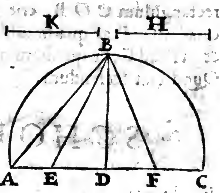
Lemma antecedens reducitur ad Problema Vieteum, Data base trianguli rectanguli, & media proportionali inter hypotenusam, & perpendiculum, inuenire triangulum.

PRO-

PROBL. XXIII. PROP. LVI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies portionis, sit ad superficiem coni, in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet D B, ad H, & ducta B A, oporteat facere, quòd imperatum est. Datis ergo duabus AD, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, per propositionem antecedentem, B E, vt quadratum datæ B A, sit ad rectangulum B E D, vt B D, ad H; & fiat ex triangulo B E D, conus E B F. Quem dico

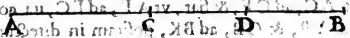


esse quæsitum. Demonstratio ex Archimede est facilissima, quapropter ad alia transeamus.

LEMMA XXXIV. PROP. LVII.

Datam rectam A B, sectam vtcumque in C, rursùm diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A D C, sit ad quadratum D B, in data proportione.

HOC Lemma triplicem habet casum, secundùm quod proportio data est, vel æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis, soluetur sic.

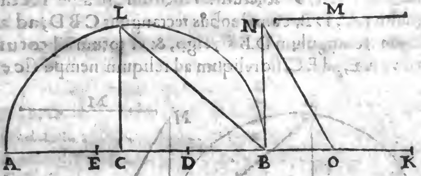


Diuidatur B C, in D, vt sit, sicut A B, ad B C, sic B D, ad D C. Nam cùm sit, vt A B, ad B C, sic B D, ad D C; ergo permutando, erit, vt A B, ad B D, sic B C, ad C D. Ergò, & diuidendo, erit, vt A D, ad D B, sic D B, ad D C. Quare rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

VEL sic. Fiat A B, diameter cuiuscumque parallelogrammi F E, & per punctum C, agatur H C G; parallela F A, vel B E, & iungatur H E, secans B A, in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim triangulum A D E, est simile triangulo

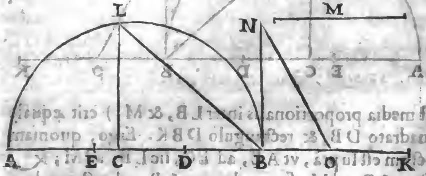
B O, nempe vnico rectangulo D B K,) quia K B, upla est B O.) Ergo duo quadrata N B, B O, erunt æqualia duobus quadratis D B, B O, & rectangulo B K. Et communi ablato quadrato B O; quadratum N B, nempe rectangulum sub L B, & M, (quia N B,



est media proportionalis inter L B, & M,) erit æquale quadrato D B, & rectangulo D B K. Ergo, quoniam factum est suprà, vt A E, ad E C, sic L B, ad M; & est, vt L B, ad M, sic quadratum L B, ad rectangulum sub L B, in M, & quadrato L B, est æquale rectangulum A B C; & pariter rectangulo sub L B, & M, probatum est æquale quadratũ D B, cum rectangulo D B K; ergo erit etiam, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K. Sed quoniam supra factum est, vt A E, ad E C, sic composita ex A B, B C, ad B K; & vt composita ex A B, B C, ad B K, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum sub tali composita in D B, ad rectangulum D B K; & rectangulum sub composita ex A B, B C, in B D, diuiditur in duplum rectangulum C B D, & in rectangu-

 lum

lum sub A C, in D B. Ergo, & vt rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B K. Cùm ergo sit, vt totum rectangulum A B C, ad totum, nempe ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic ablatum ad ablatum, nempe rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad ablatum rectangulum D B K; ergo, & vt totum ad totum, seù vt A E, ad E C, sic reliqum ad reliqum, nempe sic ex-

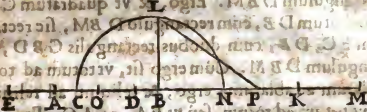


cessus rectanguli A B C, super rectangulum A C, D B, & super duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt A C, ad C E, sic talis excessus, cum quadrato D B, ad quadratum D B. Sed talis excessus, cum quadrato D B, facit rectangulum A D C. Nam, duo quadrata C B, B D, excedunt duo rectangula C B D, quadrato C D; & rectangulum A C B, excedit rectangulum A C, D B, rectangulo A C D; quod cum quadrato C D, facit rectangulum A D C. Ergo, & vt A C, ad C E, sic rectangulum A D C, ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd

Quòd verò assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet ex processu demonstrationis. Quia non in C. Nam, cùm probatum sit, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, nempe ad rectangulum K D B, nempe, ex suppositione, ad rectangulum K C B; & cùm sit, vt rectangulum A B C, ad rectangulum K C B, sic A B, ad K C; erit, vt A E, ad E C, sic A B, ad C K. Sed pariter factū est, vt A E, ad E C, sic A B, cum B C, ad B K. Ergo esset etiam, vt A B, ad C K, sic A B, cum B C, ad B K, minorem C K. Quod est absurdum. Et multò maius absurdum concluderetur si punctum D, caderet vltra C. Ergo cadit inter C, B.

SI verò proportio data sit defectus, sit ea, quam habet A C, ad C E; & fiat, vt E A, ad A C, sic, & du-



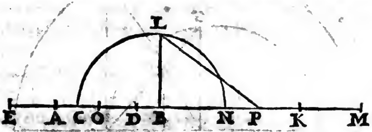
pla C B, ad B K, & B C, ad K M; positas in directum, tum inter se, tum ipsi A B; & diuisa B K, bifariam in N, super C N, fiat semicirculus; & a puncto B, erigatur perpendicularis B L. Pariter secetur B M, bifariam in P, & iuncta L P, fiat ei æqualis P D, (ostendetur inferius punctum D, cadere inter C, B,) & ipsi D B, fiat æqualis C O. Dico punctum O, esse quæsitum.

Eodem

Eodem enim modo, quo factum est suprà, ostendetur, quadratum L *B*, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M; ac proinde etiam rectangulũ C *B* N, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M. Sed quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C *B*, ad *B* K, seu C *B*, ad B N; & vt C *B*, ad *B* N, sic quadratum C *B*, ad rectangulum C *B* N, seù ad ei æquale quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Ergo, & vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Rursùm, quoniam supra factum est, vt E A, ad A C, sic tam E C, ad K M, quàm dupla C *B*, ad B K; ergo erit, vt E A, ad A C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe E C, cum dupla C *B*, ad totam *B* M. Sed vt E C, cum dupla *B* C, ad *B* M, sic (sumpta communi altitudine D *B*,) rectangulum sub E C, in D *B*, cum duplo rectangulo C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Ergo, & vt quadratum C *B*, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B*M, sic rectangulum E C, D *B*, cum duobus rectangulis C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Cùm ergo sit, vt totum ad totũ, sic ablatum ad ablatum; ergo, & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, seù vt E A, ad A C. Ergo, & vt E A, ad A C, sic excessus quadrati C *B*, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Ergo, & componendo, vt E C, ad C A, sic excessus duorum quadratorum C *B*, *B* D, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Et conuertendo, vt quadratum D *B*, seù, vt quadratum C O, (quia C O, facta est æqualis

D *B*,

DB,) ad excessum quadratorum CB, BD, vel CO; super rectangulum EC, DB, seù ECO, & super duo rectangula CBD, seù BCO, sic AC, ad CE. Sed, & vt AC, ad CE, sic rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Ergo, & vt AC, ad CE, tàm est quadratum CO, ad excessum duorum quadratorum CB, CO, super rectangulum ECO, & super duo rectangula BCO, quàm rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Quare, & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, seù, vt AC, ad CE, sic ambo ante-



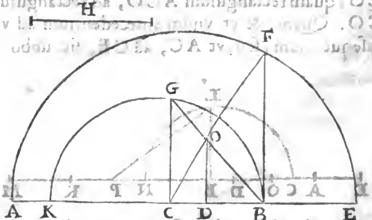
cedentia ad ambo consequentia, nempe sic quadratum CO, cum rectangulo ACO, nempe rectangulū AOC, ad excessum duorum quadratorum BC, CO, solum, super duo rectangula BCO, nempe ad quadratum OB. Quod erat faciendum.

Quòd autem assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet. Quia non in C; nam cùm probatum sit, esse, vt EA, ad AC; sic quadratum CB, ad rectangulum MDB, nempe in tali casu, ad rectangulum MCB; & cùm sit, vt quadratum CB, ad rectangulum MCB, ita CB, ad CM; esset, & vt EA, ad AC, sic CB, ad CM. Quòd est absurdū, quia supra

factum

factum est, vt E A, ad A C, sic C B, ad solam B N. Et maius absurdum concluderetur, si punctum D, caderet vltra C. Ergo patet propositum.

SED præsens Lemma potest vnica demonstratione comprehendente omnes casus facilius solui, sed per locum solidum, quàm non erit inutile hic subingere.



Sit ergo data A B, diuisa in C, vt supra; & data ratio sit, quam habet A C, ad H. Producatur A B, in E, vt C B, B E, sint æquales; & facta A E, diametro semicirculi, erigatur à puncto B, perpendicularis B F; & circa axim C B, diametro transuersa A C, per prop. 53. primi conicorum, describatur hyperbola transiens per punctum F, cuius vertex sit C; deinde fiat, vt H, ad A C, sic C B, ad C K, vbicumque cadat punctum K, & super K B, fiat semicirculus ad eandem partem cum priori, ac à puncto C, erecta perpendiculari C G, ducatur G B, secans hyperbolam in puncto O; demissa

ergo

ergo à puncto O, perpendiculari O D, super A B, secante ipsam in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

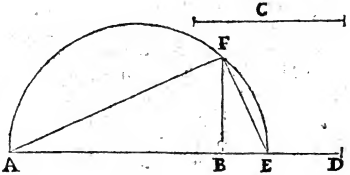
Etenim, propter similitudinem triangulorum G B C, O D B, est, vt G C, ad C B, sic O D, ad D B; & pariter est, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic quadratum O D, ad quadratum D B. Sed, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic K C, ad C B, nempe A C, ad H, (factum est enim supra, vt H, ad A C, sic B C, ad C K; quare conuertendo, erit, vt K C, ad C B, sic A C, ad H.) Ergo, vt A C, ad H, sic quadratum O D, nempe rectangulum A D C, (quod ei ostendetur æquale) ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd verò rectangulum A D C, sit æquale quadrato D O, sic patebit. Nam, quia B C, est æqualis B E, rectangulum A B C, erit æquale rectangulo A B E, nempe quadrato B F. Sed, ex propositione 21. primi conicorum, est vt rectangulum A B C, ad quadratum B F, sic rectangulum A D C, ad quadratum D O. Quare patet propositum.

LEM. XXXV. PROP. LVIII.

Data base trianguli rectanguli, & data media proportionali inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inuenire triangulum.

DAta basis sit A B, & data media proportionalis sit C, & oporteat inuenire triangulum. Fiat, vt A B, ad C, sic C, ad B D, positam in directum ipsi A B; deinde data A D, secta in B, rursum secetur in E, vt re-



ctangulum A E B, sit æquale quadrato D E, per propositionem antecedentem, & super A E, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur perpendicularis B F, & ducantur A F, F E. Dico triangulum A F B, esse quæsitum.

Quo-

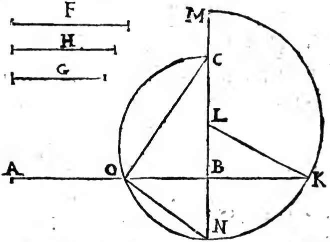
Quoniam enim rectangulum A E B, est æquale tàm quadrato E D, quàm quadrato E F; ergo, & duo quadrata E D, E F, pariter duæ lineæ E D, E F, erunt æquales. Tunc; quoniam rectangulũ A B D, est æquale quadrato C, per constructionem, & pariter est æquale rectangulis A B E, & A B, E D; ergo, & quadratum C, erit æquale rectangulo A B E, nempe (quadrato B F,) & A B, E D, nempe A B, F E, quia duæ D E, F E, ostensæ sunt æquales. Sed, propter similitudinem triangulorum rectangulorum A B F, B F E, rectangulo A B, F E, est æquale rectangulum A F B. Ergo quadratum C, erit æquale quadrato F B, & rectangulo A F B, nempe rectangulo sub composita, ex hypotenusa A F, & perpendiculo F B, & sub perpendiculo F B. Quare patet propositum.

LEM. XXXVI. PROP. LIX.

Datis ijsdem, quæ in propositione 55. facere eadem, quæ ibidem, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, cum quadrato O B, in data proportione.

SIT data proportio, quàm habet F, ad G, & inter F, G, inueniatur media H. Data autem B C, base trianguli rectanguli, & data H, media proportionali

inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inueniatur triangulum C O B. Dico factum esse, quod proponebatur.



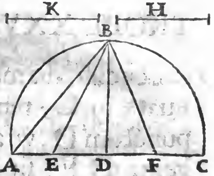
Quoniam enim rectangulum sub composita ex C O, & O B, & sub O B, est æquale quadrato H; ergo quadratum F, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed quadratum F, ad quadratum H, est vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum sub composita ex C O, O B, in O B, nempe ad rectangulum C O B, cum quadrato O B. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL· XXIV· PROP· LX·

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis ſit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

EXponatur linea K, potens ſimul duo quadrata BA, AD; & data ratio ſit, quàm habet AD, ad H. Datis autem duabus AD, DB, continentibus angulum rectum ADB, ducatur à puncto B, linea BE, vt ſit, vt AD, ad H, ſic quadratum K, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, per antecedentem propoſitionem, & fiat conus EBF. Quem dico eſſe quæſitum.



Quia, vt AD, ad H, ſic quadratum K, nempe duo quadrata BA, AD, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, nempe, ex Archimede, totus perimeter portionis ABC, ad totum perimetrum coni EBF. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVamuis Propoſitione 57. propoſitum ſit Lemma ſic vniuerſaliter, attamen, vt patuit Propoſitione 58. non indigebamus ipſo ad ſolutionem antecedentis Problematis, ſic vniuerſaliter propoſito, ſed tantùm in proportione æqualitatis. Verùm ad vberiorem ſcientiam, & quia ex ipſo dependent alia Problemata, quamuis non pertinentia, nec ad conos, neque ad ſphæras, nec ad ſuperficies conicas, nec ad ſuperficies ſphæricas; propoſuimus ipſum vniuerſaliter. Vt ergo capiamus fructum ex ipſo manantem, ſoluemus duo ſequentia Problemata.

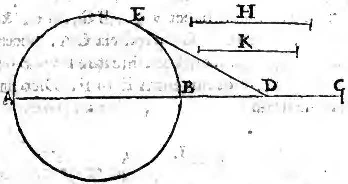
PROBL. XXV. PROP. LXI.

Datis circuli diametro A B, continuata in C, reperire inter B, C, punctum D, vt ab ipſo ducta tangente D E, ſit hæc ad D C, in data proportione.

DAta ratio ſit, quàm habet A B, ad H, quæ continuetur ad tertium terminum K; deinde, per Propoſitionem 57. data A C, ſecta in B, taliter ſecetur in D, inter C, B, vt rectangulum A D B, ſit ad quadratum

tum

tum D C, vt A B, ad K; & à puncto D, ducatur tangens D E. Dico factum esse, quod proponebatur.



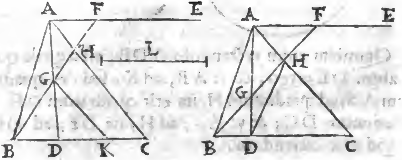
Quoniam enim rectangulo A D B, est æquale quadratum D E; ergo, & vt A B, ad K, seù, vt quadratum A B, ad quadratum H, ita erit quadratum D E, ad quadratum D C; & vt A B, ad H, sic D E, ad D C. Quod erat faciendum.

PROBL. XXVI. PROP. LXII.

In triangulo B A C, à puncto A, sint ductæ duæ lineæ, A D, occurrens B C, inter B, C, & A E, parallela B C, indefinita; à puncto B, ducere B G H F, tali lege, vt quadratum B G, ad rectangulum F G H, sit in data proportione.

Data

Data recta BC, secta in D, rursùm seceturin K, inter D, C, per propositionem 57. vt rectangulum BKD, sit ad quadratum KC, in data proportione, quæ sit ea, quam habet v. g., BC, ad L, & per punctum K, ducatur KG, parallela CA, occurrens A D, in G, & per puncta B, G, ducatur linea BGHF, secans AC, in H, & occurrens AE, in F. Dico lineam BF, esse quæsitam.



Quoniam enim rectangulum BKD; ad quadratum KC, habet rationem compositam ex rationibus BK, ad KC, & DK, ad KC; ergo, & ratio BC, ad L, componetur ex istis proportionibus. Sed vt BK, ad KC, sic (ob parallelas GK, AC,) BG, ad GH; & pariter, vt DK, KC, sic DG, ad GA, & (ob parallelas AF, BD,) vt DG, ad GA, sic BG, ad GF. Ergo, & BC, proportio ad L, componetur ex duplici proportione, nempe BG, ad GH, & BG, ad GF, quæ duæ faciunt rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Quare patet propositum.

Quamuis verò hoc Problema sit sic vniuersale, attamen

men non erit inutile tradere aliam propositionem in proportione æqualitatis, quæ non supponet propositionem 57.

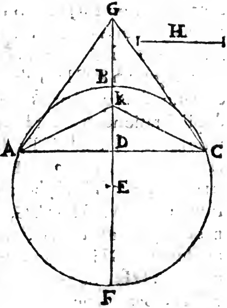
Datis ergo, quæ supra, ducatur D H, parallela A B, & per B, & H, ducatur B G H F. Quàm dico esse quæsitam. Nam (ob parallelas H D, B A,) duo triangula A H B, A D B, sunt æqualia; & dempto communi triangulo A G B, triangulum A G H, erit æquale triangulo B G D. Nunc; quoniam triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex ratione trianguli B G D, ad triangulum G A F, & trianguli G A F, ad triangulum G A H; vt autem triangulum B G D, ad triangulum G A F, sic (quia ista triangula sunt similia ob parallelas B D, A F,) quadratum G B, ad quadratum G F; & vt triangulum G A F, ad triangulum G A H, sic F G, ad G H. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam ex rationibus quadrati B G, ad quadratũ G F, nempe ex duplici ratione B G, ad G F, & G F, ad G H. Sed rationes B G, ad G F, & G F, ad G H, faciunt rationem B G, ad H G. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex rationibus B G, ad G F, & B G, ad G H. Sed istæ duæ rationes componunt etiam rationem quadrati B G, ad rectangulum F G H. Ergo vt triangulum B G D, ad triangulum A G H, sic quadratum B G, ad rectangulum F G H. Sed triangulum B G D, probatum est æquale triangulo F G H. Quare &c. Quod &c.

S PRO-

PROBL. XXVII. PROP. LXIII.

Data sphæræ portione, constituere conum super eamdem basim portionis, vt portio sit ad conum in data proportione.

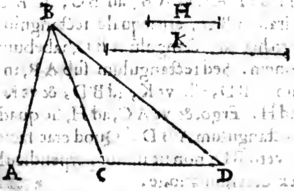
SIT data portio A B C, sphæræ, cuius diameter F B, centrum E, & data proportio sit, quam habet F D, ad H. Oportet facere &c. Fiat, vt F D, ad F D, cum F E, sic D B, ad D G, & fiat conus A G C, cuius axis sit G D. Ergo conus A G C, ex Archimede supra citato, est æqualis portioni A B C. Fiat ergo, vt F B, ad H, sic G D, ad D K, vbicumque cadat K, & fiat conus A K C. Quem dico esse quæsitum. Nam conus G A C, seu portio A B C, est ad conũ A K C, vt G D, ad D K; seu vt F B, ad H. Quod erat faciendum.



LEM. XXXVII. PROP. LXIV.

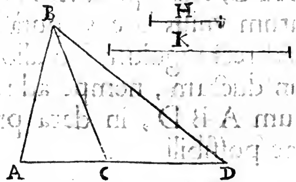
Dato quolibet triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineam B D, occurrentem lateri A C, etiam producto, vt quadratum vnius lateris, putà B C, sit ad rectangulum sub alio latere in ductam, nempe ad rectangulum A B D, in data proportione possibili.

PRoportio possibilis est, quod si proportio sit excessus sit, non maior ea, quàm habet quadratum



B C, ad rectangulum sub B A, in perpendiculum, quia aliter B D, non esset ducibilis, cùm esset minor perpen-

diculo. Data ratio sit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A B, ad B C, sic B C, ad K; & fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ non erit minor perpendiculo trianguli, vt patebit ex determinatione Lemmatis, ac proinde si ducatur à puncto B, occurret A C; occurrat in puncto D. Dico quadratum B C, esse ad rectangulum A B D, in data proportione A C, ad H. Nam, quoniam factum est, vt A B, ad B C, sic B C, ad K; ergo quadratum B C, erit æquale rectangulo sub A B, & K. Ergo hęc ad rectangulũ A B D, habebunt eandem proportionem. Sed rectangulum sub A B, in K, ad rectangulum A B D, est, vt K, ad B D; & vt K, ad B D, sic A C, ad H. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadratum B C, ad rectangulum A B D. Quod erat faciendum.



Quòd verò B D, non sit minor perpendiculo, patet, vt dixi, ex determinatione.

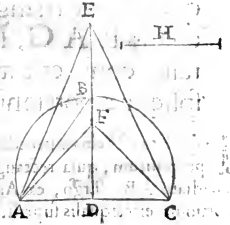
PRO-

PROBL. XXVIII. PROP. LXV.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica portionis, ſit ad ſuperficiem conicam coni, in data proportione.

DAta portio ſit A B C, & data ratio ſit, quam habet A D, ad H. Oportet facere, quod imperatum eſt. Ducatur B A. Infra patebit oportere proportionem datam minorem eſſe ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum A D.

A vertice ergo A, dati trianguli A D B, ducatur A E, occurrens D B, in E, vt quadratum A B, ſit ad rectangulum E A D, vt A D, ad H; & ex triangulo E A D, reuoluto circa E D, fiat conus A E C. Dico conum A E C, eſſe quæſitum. Patet facili- ter; nam ſuperficies portionis A B C, ad ſuperficiem coni E A C, eſt, ex Archimede ſæpè citato, vt quadratum B A, ad rectangulum E A D, nempe vt A D, ad H. Quod erat faciendum.



Quòd

Quòd verò proportio data debeat esse minor ea, quàm habet quadratum B A, ad quadratum A D, patet; quia aliter cùm non possit duci A E, conus E A C, non esset construibilis.

LEM·XXXIIX· PROP·LXVI·

Sit portio A B C, cuius vertex B, axis B D, diameter basis A C, & ducatur A B, fiatque vt D A, ad A B, ita A B, ad aliam, quæ erit ipsa A B, maior, & sit A E, occurrens D B, productæ in E. Dico, quod si ex triangulo E A D, fiat conus E A C, superficies conica talis coni erit æqualis superficiei sphericæ portionis A B C.

INspiciatur schema antecedentis Propositionis. Patet propositum, quia rectangulum E A D, est æquale quadrato A B. Ergo, ex Archimede, & superficies portionis, erit æqualis superficiei coni.

COROLLARIVM.

EX dictis deducitur, totum perimetrum portionis, esse æquale toti perimetro coni, addita nempe basi communi.

SCHO-

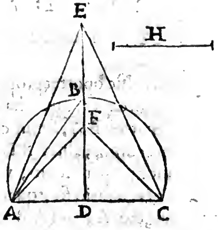
SCHOLIVM.

HIC etiam non erit inutile notasse, quòd si portio sit hemisphærium, latus coni erit æquale [d]iametro sphæræ, quia tunc A B, est media proportio[na]lis inter A D, semidiametrum sphæræ, & diametrum. [N]otetur etiam, si placet, totum perimetrum coni esse [du]plum circuli maximi sphæræ; ac proinde se habere [ad] circulum maximum, seu ad suam basim, vt Cylindrus eadem basi, & altitudine, ad conum.

PROBL. XXIX. PROP. LXVII.

Idem.

DAta proportio sit A D, ad H; & fiat conus A E C, cuius superficies sit æqualis superficiei sphæricæ [p]ortionis. Patet ergo fa[c]iliter, quod si Problema [d]ebet solui, oportet ra[t]ionem A D, ad H, esse [m]inorem ea, quam habet [r]ectangulum E A D, ad [q]uadratum A D. Fiat er[g]o, vt A D, ad H, sic E A, [a]d aliam, quæ ex determi[n]atione erit maior A D, [a]c proinde, si ducatur à puncto A, occurret D E, occurrat in F, & fiat conus AFC.



AFC. Quem aio esse quæsitum. Demonstratio est facilissima; quia vt A D, ad H, sic E A, ad A F, nempe, (sumpta communi altitudine A D,) rectangulū E A D, ad rectangulum F A D. Nempe quadratum B A, æquale rectangulo E A D, ad rectangulum F A D. Nempe, superficies portionis A B C, ad superficiem coni A F C. Quod erat faciendum.

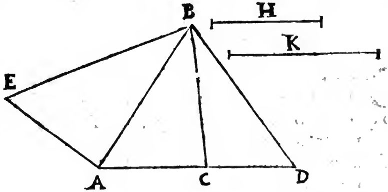
LEM. XXXIX. PROP. LXVIII.

Dato triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineā B D, occurrentem A C, productæ (si opus sit) tali lege, vt duo quadrata C B, B A, sint ad rectangulum D B A; cum quadrato B A, in data ratione possibili.

ETiam hic oportet proportionem datam non esse maiorem ea, quam habent duo quadrata C B, B A, ad quadratum B A, simul cum rectangulo sub B A, in perpendiculum; aliter B D, non posset duci, quia esset minor perpendiculo, vt consideranti patet.

Data ergo ratio sit, quam habet A C, ad H, & erigatur à puncto A, ipsi A B, perpendicularis A E, æqualis ipsi B C; & ducatur B E. Tunc fiat, vt A B, ad B E, sic

ſic B E, ad K; deinde fiat vt A G, ad H, ſic K, ad aliam, quæ ex determinatione Problematis, non erit minor compoſita ex A B, & perpendiculo, vt patebit ex proceſſu demonſtrationis. Quare ſi ab ipſa auferatur æqualis A B, & reliqua ducatur à vertice B, vtique occurret A C. Occurrat ergo, & ſit B D.



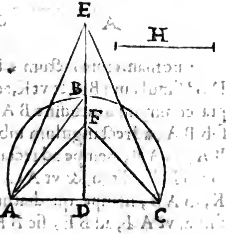
Quoniam enim factum eſt, vt A C, ad H, ſic K, ad D B ſimul cum B A, & vt K, ad D B, cum B A, ſic (ſumpta communi altitudine B A,) rectangulum ſub K, & ſub B A, ad rectangulum ſub compoſita ex D B, & B A, in A B, nempe ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Ergo, & vt A C, ad H, ſic rectangulum ſub K, in A B, nempe quadratum B E, (nam factum eſt ſupra, vt A B, ad B E, ſic B E, ad K,) ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Sed quadrato B E, ſunt æqualia duo quadrata B A, A E; & quadrato A E, eſt æquale quadratum B C, ex conſtructione. Ergo, & vt A C, ad H, ſic quadrata A B, B C, ad rectangulum D B A, cum quadrato A B. Quod erat faciendum.

T PRO-

PROBL. XXX. PROP. LXIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A D, ad H, quam patebit oportere minorem esse ea, quam habent duo quadrata B A, A D, ad duo quadrata A D. Per Lemma ergo antecedens vniuersalius propositum, à puncto A, vertice dati trianguli B A D, ducatur A F, vt duo quadrata B A, A D, sint ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, vt A D, ad H; & ex triangulo F A D, reuoluto circa F D, fiat conus A F C. Quem dico esse quæsitum.



Nam, vt A D, ad H, sic duo quadrata B A, A D, ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, nempe, ex sæpe dictis, perimeter portionis A B C, ad perimetrum coni A F C. Determinatio est euidens, quia aliter Problema esset insolubile, vt consideranti fiet manifestum.

PRO-

PROBL. XXXI. PROP. LXX.

Idem.

HOC idem Problema soluetur aliter, & facilius Inueniatur conus E A C, cuius perimeter sit æqualis perimetro portionis A B C. Deinde fiat, v A D, ad H, sic E A, cum A D, ad aliam, quæ ex determinatione, erit maior dupla A D. Quare, si ex ipsa auferatur æqualis A D, reliqua erit maior ipsa A D. Ergo poterit duci à puncto A, in D B. Ducatur ergo vbicunque cadat, & sit A F; & fiat conus, vt prius, A F C. Quem assero esse quæsitum.

Demonstratio est facilis; quia vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad F A, cum A D, nempe (sumpta commun altitudine A D,) rectangulum E A D, cum quadrato A D; nempe perimeter coni A E C, ad perimetrum coni A F C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

DVo sequentia Problemata, quoad solida ab alijs demonstrantur, ac soluuntur, à nemine verò quod sciam, quoad superficies; quare ipsos soluemus quoad superficies.

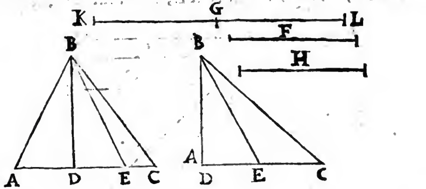
LEM. XL. PROP. LXXI.

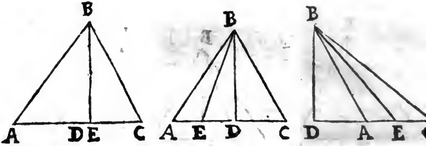
In dato triangulo ducto perpendiculo ab angulo verticis in basim, ducere ab eodem angulo aliam lineã in basim protractam etiam si opus sit, vt rectangulum sub ducta, & sub perpendiculo, vna cum rectangulo sub vno latere, & sub eodem perpendiculo, sit ad hoc idẽ rectangulum, cum quadrato alterius lateris, in data proportione.

Datum triangulum sit ABE, data verò ratio, quã habet AB, ad H; & sit ducta perpendicularis BD. Oportet à puncto B, ducere BC, vbicunque occurrentem AE, vt rectangulum CBD, cum rectan- ABD, sit ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE, vt AB, ad H.

Patet in primis, Lemma quinque habere casus, secundum diuersitatem anguli verticalis, & diuersum modum casus perpendiculi. Potest enim, vel cadere inter A, E, vt in prima figura; vel in ipso puncto A, vt in secunda, quando scilicet perpendiculum est idem, ac latus BA; vel in ipso puncto E, vt in tertia, quando scili-

ſcilicet eſt idem, ac latus B E; vel extra A E, ad partes E, vt in quarta; vel tandem extra A E, ad partes A, vt in quinta. In primo, quarto, & quinto caſu, oportet, quod ſi proportio ſit minoris inæqualitatis, tamen ſemper ſit

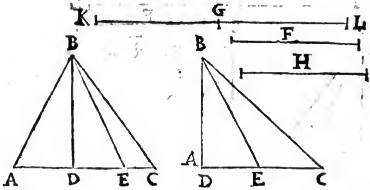


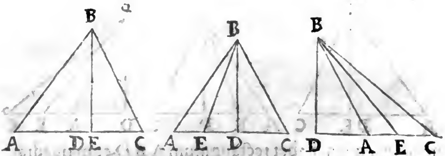


maior ea, quam habet rectangulum A B D, cum quadrato B D, ad rectangulum A B D, cum quadrato BE. In ſecundo caſu oportet eſſe maiorem ea, quam habent duo quadrata B A, ad quadrata B A, & BE. Tādem in tertio caſu, oportet ſemper eſſe proportionem maioris inæqualitatis. Determinationes facilè erunt manifeſtæ conſideranti; nam, ſi aliter eſſet, quam determinatum eſt, B C, non poſſet duci; nam, vel eſſet æqua-

lis

lis B D, vel minor ea. His præhabitis, Fiat, vt perpendiculum B D, ad latus *B* E, sic B E, ad F; deinde fiat vt H, ad A B, sic composita ex A *B*, & F, ad K L, quam aio futuram maiorem ipsis *A* B, B D, (vt patebit inferius.) Si ergo à maiori K L, auferatur K G, æqua-





lis *A* B, reliqua G L, erit maior B D. Ergo poterit duci à puncto B, ad aliquod punctum lineæ *A* E, etiam productæ, si opus sit; ducatur, & sit B C. Dico factum esse, quod proponebatur. Patet. Nam, quoniam factum est, vt H, ad *A* B, sic *A* B, cum F, ad K L, nempe ad duas A B, B C; ergo conuertendo, erit vt *A* B, ad H, sic *A* B, cum B C, ad *A* B, cum F. Sed vt C B, cum

B *A*,

BA, ad BA, cum F, sic (sumpta communi altitudine BD,) rectangulum CBD, cum rectangulo ABD, ad idem rectangulum ABD, cum rectangulo sub BD, in F, nempe cum quadrato BE, (quia factum est, vt BD, ad BE, sic BE, ad F.) Ergo vt AB, ad H, sic duo rectangula CBD, & ABD, ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE. Quod erat faciendum.

Quòd KL, sit maior AB, BD, patet ex processu demonstrationis, & ex Lemmatis determinatione.

SCHOLIVM.

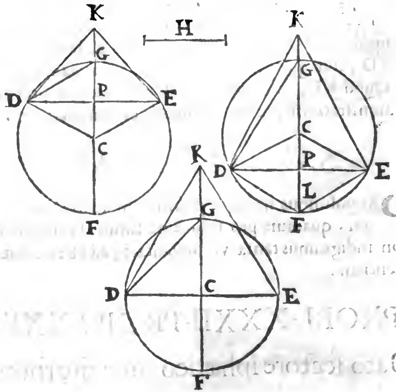
Proposuimus hanc propositionem adeò vniuersaliter, quamuis pro solutione futuri Problematis, non indigeamus tanta vniuersalitate, ad vberiorem scientiam.

PROBL. XXXII. PROP. LXXII.

Dato sectore sphærico, inuenire rhombum conicum, cuius vnus conus sit idem, ac conus sectoris, & basis conorum sit basis coni sectoris, adeò vt superficies rhombi, sit ad superficiem sectoris, in data proportione.

Hoc

HOC Problema triplicem habet casum, secundùm quod sector, vel est maior, vel minor, vel æqualis hemisphærio, scilicet quando sector degenerat



in hemisphærium; & secundùm diuersos casus, Problema recipit diuersas determinationes. Sit ergo sphæra, cuius diameter GF, centrum C, & sit sector DGEC, vel minor hemisphærio, vt in prima figura, vel maior, vt in secunda, vel æqualis, vt in tertia, (quamuis impropriè hemisphærium dicatur sector, sicut, & rhombus inueniendus, non est rhombus, sed conus, quia hemi-

hemisphærij non est conus) Pariter in secunda figura, sector maior hemisphærio non habet conum, sed est minor portione D G E P, quantitate coni D C E. Intelligatur circulus maximus D G E F, ortus ex sectione, & reliqua, vt moris est; & in omni casu, ducta D G, ac in secunda figura, facta P L, æquali P C, & iunctis D L, L E, ac intellectis conis D C E, D L E, patet istos esse æquales. Data ergo ratio sit, quam habet F C, ad H. Oportet, quod si hæc sit minoris inæqualitatis, sit tamen in primo, & secundo casu, maior ea, quam habet rectangulum C D P, cum quadrato D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G. In tertio verò casu, oportet maiorem esse ea, quam habent duo quadrata C D, ad quadratum C D, cum quadrato D G. Tunc, per antecedes Lemma, dato triangulo C D G, & ducto perpendiculo D P, ducatur D K, vt rectangulum C D P, cum rectangulo K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, sit vt F C, ad H; & intelligatur rhombus KDCE, in prima, K D L E, in secunda, & conus K D E, in tertia figura. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, in prima figura, proportio rectangulorum C D P, & K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, est eadem cum proportione perimetri rhombi K D C E, ad superficiem sectoris D G C E, ex Archimede sæpe citato. In secunda verò figura, est eadem cum proportione superficiei rhombi K D L E, ad superficiem sectoris D G E C. Quia superficies sectoris constat ex superficie sphærica portionis D G E, & conica coni D C E, cui est æqualis conica coni D L E. In tertia

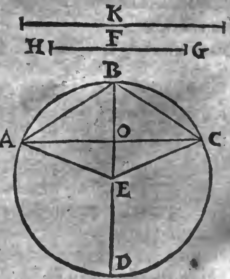
 figura

figura autem, est eadem cum ea, quam habet totus perimeter coni K D E, ad totum perimetrum hemisphærij D G E.

Determinationes, & reliqua, petenda sunt ex antecedenti Lemmate; nam præsens Problema, aliud non est, quam antecedens Lemma.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXIII.

In data sphæra reperire sectorem, cuius superficies sphęrica, sit ad superficiem conicam sui coni, in data proportione.



Datæ sphæræ sit diameter D B, centrũ E, & data proportio sit, quam habet B E, ad H F. Oportet facere, quod imperatum est. Sumatur ipsius H F, dupla H G, & fiat, vt E B, ad H G, sic H G, ad K; deinde diuidatur B D, in O, vt sit, sicut B E, ad K, sic B O, ad O D, vbicunque cadat punctũ O, & per O, ducatur

tur perpendicularis A O C, ipsi B D, & reliqua fiant, vt in schemate; & intelligantur solida, &c. Dico inuentũ esse sectorem A B C E, siue maiorem, siue minorem hemisphærio, cuius superficies sphærica A B C, sit ad superficiem conicam coni A E C, vt B E, ad H F. Nam, quoniam factum est, vt E B, ad K, sic B O, ad O D, & proportio B E, ad H G, est subduplicata proportionis B E, ad K, & pariter proportio B O, ad O A, est subduplicata proportionis B O, ad O D. Ergo, & vt B E, ad H G, sic B O, ad O A. Et ad consequentium dimidias. Ergo vt B E, ad H F, sic B O, ad dimidiam A O. Sed, vt B O, ad dimidiam A O, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum D B O, nempe ei æquale quadratum A B, ad rectangulum sub D B, in dimidiam A O, nempe ad rectangulum sub dimidia B D, nempe sub A E, in totam A O. Ergo vt B E, ad H F, sic quadratum A B, ad rectangulum E A O; nempe superficies sphærica portionis A B C, ad superficiem conicam coni E A C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

VT diximus supra, hoc Problema comprehendit, tàm sectores maiores, quàm minores hemisphærio, & semper punctum O, diuidet B D, vt possit fieri conus, præterquamquod, quando proportio erit dupla, quia tunc, punctum O, cadet in E, nempe in centro.

Dominus Ricardus Albius Anglus, Vir nobilitate sanguinis, ac eruditione conspicuus, in suo hemisphæ-

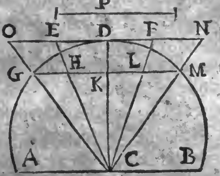
rio diſſecto propoſ. 11. ſoluit hoc Problema. Conum ſegmenti, ad conum rectangulum, in quacumque data ratione conſtituere. Curauimus aliquando, ſoluere hoc Problema in ſuperficiebus conicis, at animaduertimus, Problema poſſe proponi vniuerſalius, nō ſolùm in cono rectangulo, ſed in omni cono, & non ſolùm in hemiſphærio, ſed in quocumque ſolido rotundo orto ex reuolutione circa axem, cuius baſis ſit circulus; ſiue tale ſolidum ſit quodlibet conoides, vel portio ſphæræ, ſphæroidis, vel ſolidum cycloidale, vel quodlibet aliud.

PROBL. XXXIV. PROP. LXXIV.

Dato quolibet ſolido rotundo ADB, circa axim DC, cuius baſis ſit circulus, cuius diameter ſit A C B, vertex eius ſit punctum D, & dato cono ECF, circa eandē axem CD, cuius baſis ſit circulus EDF, tangens ſolidum in vertice D; ſecare ſolidum A D B, & conum ECF, plano GM, baſi parallelo vt facto cono GCM, ſit hic, ad conum HCL, abſciſum à cono ECF, in data proportione.

Data

DAta proportio sit, quam habet CD, ad P, & fiat vt P, ad DC, sic quadratum DE, ad quadratum DO, & iuncta OC, per punctum G, vbi CO, secat superficiem solidi; ducatur planũ GHKLM, basi ACB, parallelum, & intelligantur coni GCM, HCL. Quos dico esse quæsitos. Est enim, vt CD, ad P, sic quadratum OD, ad quadratum DE; nempe (ob parallelas OD, GK,) sic quadratum GK, ad quadratum HK. Vt autem quadratum GK, ad quadratũ HK, sic circulus, cuius diameter GM, ad circulum, cuius diameter HL, nempe conus GCM, ad conum HCL. Quod erat faciendum.

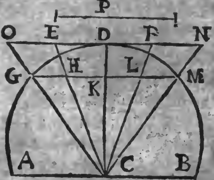


PROBL. XXXV. PROP. LXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies coni GCM, sit ad superficiem conicam coni HCL, vt CD, ad P.

INtelligantur omnia secta plano consueto modo; & datis duabus rectis lineis CD, DE, continentibus angu-

angulum rectum CDE, ducatur CO, vt rectangulum COD, sit ad rectangulum CED, in data proportione CD, ad P, per proposit. 55. & per punctum G, agatur planum, & fiant omnia, vt in superiori Problemate. Dico &c.



Nã, ob parallelas OD, GK, facilè patebit, esse, vt rectangulum COD, ad rectangulum CED, nempe, vt CD, ad P, sic rectangulum CGK, ad rectangulum CHK, nempe superficiem coni GCM, ad superficiem coni HCL. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVI. PROP. LXXVI

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidẽ, vt totus perimeter coni CGM, ad totum perimetrum coni CHL, sit vt CD, ad P.

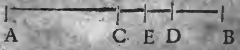
AD soluendum hoc Problema, vtemur prop. 68. nempe, ducemus CO, vt rectangulum COD, cum quadrato OD, sit ad lineam potentem rectangulũ CED, cum quadrato ED, vt CD, ad P; & per punctum

ctum G, ducetur planum, vt prius, & reliqua fient vt prius. Dico perimetrum coni G C M, esse ad perimetrum coni H C L, vt C D, ad P. Demonstratio est facilis, ac proinde omittitur.

LEM. XLI. PROP. LXXVII.

Sit recta linea A B, secta in C, vel bifariam, vel non bifariam, sed adeò vt A C, sit maior C B. Si rursùm C B, secetur in D, & D C, secetur bifariam in E; tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectãgulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B E, maior est B D, & D E, E C, sunt æquales; ergo tria rectangula B E C, erunt maiora tribus rectangulis B D E. Sed & tria quadrata C E, sunt maiora duobus quadratis C E; ergo tria rectangula B E C, cum tribus quadratis C E; nempe



tria rectangula B C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Sed, si linea A B,

secta

secta est bifaria in C, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis A C E; si verò A C, est maior C B, tria rectangula A C E, sunt maiora tribus rectangulis B C E. Ergo, in vtroque casu, tria rectangula A C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C, E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Ex dictis clarè tenetur, quòd, cùm tria rectangula A C, E B, vna cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint minora, quam tripla vnius rectanguli A C B. Si proponatur: Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm secare in puncto D, inter C, B, vt rursùm secta D C, in puncto E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in proportione, vel tripla, vel maiori tripla; tenetur dico, quod semper A C, debet esse minor C B. Et è contra, si proportio sit minor tripla, tenetur, Problema posse solui, siue A C, sit æqualis, siue maior C B.

LEM· XLII· PROP· LXXVIII·

Sit recta linea AB, ſecta in punctis C, D, E, F, G, ſic, vt DC, ſit dupla AC; DF, ſit dupla FB; & DE, ſit dupla GB. Patet, quod, cum tota BD, ſit ſexquialtera DF, & DE, cum GB, ſit ſexquialtera DE, etiã reliqua EG, erit ſexquialtera EF. Si DE, ſecetur bifariam in H, tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia, rectangulo ADE, triplo rectangulo CD, HF, triplo rectangulo HEF, & duplo quadrato DH.



Quoniam enim BG, & DH, ſunt æquales, quia dimidiæ eiuſdem DE; ergo rectangulum DE,

GB, erit æquale rectangulo EDH, seù duobus quadratis DH. Communi addito rectangulo DEG. Ergo rectangulum DEG, cum rectangulo DE, GB, nempe totum rectangulum DEB, erit æquale rectangulo DEG, & duplo quadrato DH. Sed rectangulo DEG, est æquale triplum rectangulum HEF, quia GE, est sexquialtera EF, & DE, est dupla HE. Ergo rectangulum DEB, erit æquale triplo rectangulo HEF, & duplo



quadrato DH. Et communibus additis tribus rectangulis CDF. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia tribus rectangulis GDF, (nempe tribus rectangulis CDH, & tribus rectangulis CD, HF,) tribus rectangulis HEF, & duplo quadrato DH. Sed tria rectangula CDH, quia AD, est sexquialtera DC, & DE, est dupla DH, faciunt rectangulum ADE. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia rectangulo ADE, triplo rectangulo CD, HF, triplo rectangulo HEF, & duplo quadrato DH. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Ex dictis infertur, quod si DF, sit maior DC, vnde, & DB, sexquialtera DF, sit maior AD, sexquialtera CD, & ex DB, auferatur KB, æqualis AD. Infer-

fer-

fertur inquam, quod, cùm tunc, duo rectangula A D E, & D E, K B, sint æqualia, si hæc hinc inde auferantur, etiam reliqua remanebunt æqualia. Vnde, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E K, erunt æqualia tribus rectangulis C D, H F, tribus rectangulis H E F, & duobus quadratis D H.

SCHOLIVM II.

INfertur secundò, quod si imperetur. Datam C F, sectam in puncto D, rursùm diuidere in E, vt diuisa D E, bifariam in H, tria rectangula C D, H F, vna cum tribus rectangulis H E F, & cum duobus quadratis D H, sint ad rectangulum C D F, in data proportione maiori, quam tripla. Infertur inquam, quod Problema erit determinatum. Et determinatio erit, vt facta D B, sexquialtera D F, & ab ipsa ablata B K, sexquialtera C D; proportio data, non sit maior ea, quam habet triplum rectangulum C D F, cum quadrato dimidiæ D K, ad rectangulum C D F. Nam, cum supra probatum sit, illa plana esse æqualia triplo rectangulo C D F, & rectangulo D E K, patet, quod ex omnibus rectangulis factis sub segmentis D K, diuisæ in puncto, rectangulum sub partibus æqualibus, seù quadratum dimidiæ, est maximum.

LEM· XLIII· PROP· LXXIX·

Si recta linea A B, ſit taliter ſecta in C, vt A C, ſit, vel minor, vel æqualis tertiæ parti C B; & rursùm C B, ſecetur in D, & C D, ſecetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, erunt minora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

Quoniam enim B C, eſt vel tripla, vel maior tripla A C. Ergo rectangulum B C E, erit, vel æquale, vel maius triplo rectangulo A C E. Sed rectangulũ



B C E, eſt æquale rectangulo B D E, & duplo quadrato D E, vel C E, vt conſideranti patet. Ergo, & rectangulum B D E, cum duplo quadrato C E, erit abſolutè maius, triplo rectangulo A C E. Et communi addito triplo rectangulo A C, E B. Ergo triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duobus quadratis C E, erit maius triplo rectangulo A C F, &

triplo

triplo rectangulo A C, E B; quæ omnia [illegible] tria rectangula A C B. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

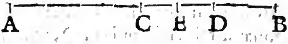
Ex dictis infertur, quod si linea A B, secta in C, proponatur taliter secanda in D, vt secta C D, in E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint, vel tripla, vel minora, quam tripla, rectanguli A C B. Infertur inquam, quod A C, non potest esse, nec minor, nec æqualis tertiæ parti C B, sed maior.

LEM. XLIV. PROP. LXXX.

Si linea A B, secta bifaria in C, rursùm secetur in D, inter C, B, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

Quoniam enim, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis D E, vel.

vel C E, vt consideranti patet; & pariter sunt æqualia tribus rectangulis A C E; ergo tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C,



E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & sex quadratis C E. Et ablatis hinc inde quatuor quadratis C E, quæ sunt æqualia quadrato C D. Ergo tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus, quod tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis B D E, & cum duobus quadratis C E, erunt maiora, quam dupla rectanguli A C B. Nam ostensa sunt æqualia tribus rectangulis A C B, minus quadrato C D. Sed hæc sunt maiora quam dupla rectanguli A C B; quia quadratum C D, est minus quadrato C B, nempe vno rectangulo A C B. Vnde habemus, quod si proponatur: Diuidere lineam A B, sectam bifariam in C, rursùm in D, vt diuisa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cũ tribus BDE,

&

& cum duobus quadratis C E, ſint ad rectangulum A C B, in data proportione minori tripla, hæc tamen proportio debet eſſe maior dupla.

LEM. XLV. PROP. LXXXI.

Sit recta linea A B, taliter ſecta in C, vt A C, ſit maior C B, & C F, ſit ſexquialtera C A, & F K, ſit ſexquialtera C B, quæ C B, ſit ſecta vtcumque in M, & C M, ſit ſecta bifariam in N. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis N M B, & duobus quadratis C N.

Fiat C G, ſexquialtera B C. Quoniam G C, eſt æqualis F K, quia ambæ factæ ſunt ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C M, erit æquale rectangulo G C M, nempe rectangulo B G M, & rectangulo G B, M C. Sed rectangulum G B, M C, eſt æquale rectangulum B C N, quia B C, eſt dupla G B, & C N, eſt dimidia

dia C M; & rectangulum B C N, est æquale rectangulo B M N, & duplo quadrato C N, vt considerãti patet; & pariter rectangulum B C M, est æquale quadrato C M, & rectangulo B M C, nempe duplo rectangulo B M N. Ergo rectangulum F K, C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, & quadrato C M. Et communi addito rectangulo K C M. Ergo duo rectangula F K, C M, & K C M, nempe rectangulum F C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, quadrato C M, & rectangulo K C M. Sed quoniam rectangulũ F C M,



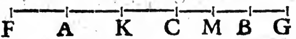
est æquale triplo rectangulo A C N, quia F C, est sesquialtera A C, & C M, est dupla C N; & pariter rectangulum K C M, cum quadrato C M, facit rectangulum K M C. Ergo, & triplum rectangulum A C N, erit æquale triplo rectangulo N M B, duplo quadrato C N, & rectangulo K M C. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectangulis A C, N B. Ergo tria rectangula A C N, cum tribus rectangulis A C, N B, (quæ faciunt tria rectangula A C B,) minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis B M N, & duobus quadratis C N. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XLVI. PROP. LXXXII.

Sit recta linea F B, secta in punctis A, K, C, vt in superiori Lem. sed C B, sit secta tantùm bifariam in M. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M.

FIat G C, sexquialtera C B. Quoniam F K, & G C, sunt æquales, quia ambæ sexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C B, erit æquale rectangulo G C B, nempe rectangulo G B C, & quadrato B C. Sed quia tres G B, B M, & M C, sunt æquales, rectangulum



G B C, est æquale duplo quadrato B M, vel M C. Ergo rectangulũ F K, C B, erit æquale duplo quadrato C M, & quadrato C B. Et communi addito rectangulo K C B. Ergo duo rectangula F K, C B, & K C B, nempe rectangulum F C B, erit æquale duobus quadratis C M, quadrato C B, & rectangulo K C B. Sed rectangulum F C B, est æquale tribus rectangulis A C M, quia F C, est sexquialtera C A, & B C, est dupla C M; & pariter

rectangulum K C B, cum quadrato C B, facit rectangulum K B C. Ergo tria rectãgula A C M, erunt æqualia duobus quadratis C M, & rectangulo K BC. Quo hinc inde ablato, & additis tribus rectangulis A C, M B. Ergo tria rectangula A C M, cum tribus rectangulis A C, M B, nempe tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CVM linea F B, sit eadem in duabus propositionibus superioribus, & eodem modo diuisa, præterquam quod in 82 linea C B, tantùm diuiditur bifariam, & in 81. diuiditur prius in M, postea C M, bifariam in N; & cum rectangulum K B C, sit maius rectangulo K M C, & quocumque alio K M C, quod habeatur secando lineam C B, in puncto M; sequitur etiam, quod tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, sint minora quibuscunque tribus rectangulis A C B, minus rectangulo K M C, quod habeatur ex tali sectione. Vnde, si proponatur. Datam lineam A B, sectam in puncto C, adeò vt A C, sit maior C B, rursùm diuidere in M, inter C, B, vt secta bifariam C M, in N, tria rectangula A C, N B, cum tribus rectãgulis N M B, & cum duobus quadratis C N, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori, quam tripla; patet, hanc proportionem debere esse adeò minorem tri-

pla,

pla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula A CB, minus rectangulo K B C, facto ex composita ex K C, quæ sit excessus sexquialteræ A C, super sexquialteram C B, & ex C B, in C B, ad rectangulum A C B; vt consideranti patet, alioquin C B, non posset diuidi.

LEM. XLVII. PROP. LXXXIII.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, B, & C, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & G B, sit dimidia A B, & G C, sit sexquialtera F A, & C B, sit diuisa in M, & A M, bifariã in K. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A M C, erunt æqualia tribus rectangulis F A, K B, tribus K M B, & duobus quadratis A K.



QVoniam rectangulum M A K, est æquale duobus quadratis A K, quia M K, & K A, sunt æquales. Ergo communibus additis tribus rectãgulis A K,

B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-



gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sesquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectágulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectágula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo GMA. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus

rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate, sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectãgulis F A,



K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

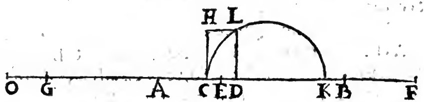
ETiam in duobus superioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, sit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, sequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, sint minora quibuscumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali sectione. Vnde si proponatur. Datam rectam F B, sectam in A, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, sexquialtera A B, etiam G C, sit sexquialtera F A; rursùm diuidere ipsam in M, inter C, B, vt secta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, sint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere esse minorem tripla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in excessum sexquialteræ F A, super dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet consideranti, alioquin non posset diuidi.

LEM-

LEM. II. PROP. LXXXV.

Datam rectam lineam AB, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuisa CD, bifariam in E, tria rectangula AC, EB, cum tribus rectangulis EDB, & cum duobus quadratis CE, sint ad rectangulum ACB, in data proportione.

HOC Lemma quinque habet casus. Nam, vel proportio data est maior, vel æqualis, vel minor tripla; & si est minor, vel AC, est æqualis CB, vel maior, vel minor. In omnibus istis casibus, Lem-

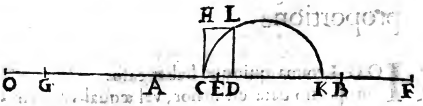


ma recipit aliquas determinationes, quas assignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & sit ea, quam habet OC, ad CA. In hoc casu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habe-

tur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos. 78. & est, quod facta F C, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nõ sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



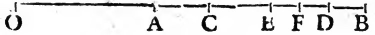
Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. proposit. 78. est æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

Quòd verò H C, sit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progressu, probaremus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidia C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

S I verò proportio data sit tripla, ex Scholio propositionis 77. habemus, quod A C, debet esse minor C B, sed ex Scholio propositionis 79 habetur debere esse maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam



A C, F B, sunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ est tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et subduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis commu-

nibus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc ſunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe ſunt ad ipſum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data ſit minor tripla, ſed A C, ſit æqualis C B. Patet ex Scholio propoſ. 80. debere eſſe



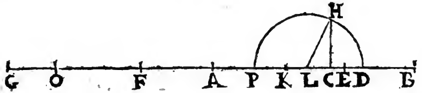
maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, eſt æquale quadrato C D. Ergo cõmuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, eſt tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, ſic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B. Ergo, & vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus

qua-

quadrato C D, ex propositione 80 sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

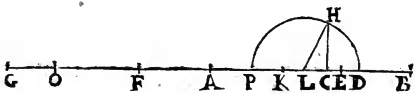
SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatio huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.



Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidē quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B,

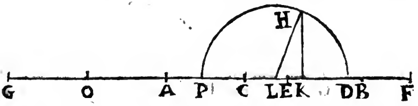
Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectāgulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula



A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

SI tandem proportio data sit minor tripla, sed A C, sit minor C B. In primis, ex Schol. proposit. 79. patet, oportere A C, esse maiorem tertia parte C B. Fiat F C, sexquialtera C B, & auferatur F K, sexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, sit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, est tria, & B F, est vnum cum dimidio, A C, est magis, quam

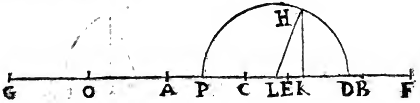


vnum, & eius sexquialtera F K, est maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmissis, ex Scholio proposit. 84. oportere proportionem datam maiorem esse ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, sit media proportionalis K H, erecta normaliter super A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, describatur semicirculus P H D, secans K B, in D; (secabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, est æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua-

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seù triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad



ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 83. tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

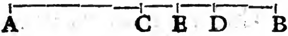
Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM-

LEM· L· PROP· LXXXVI·

Sit recta linea A B, ſecta in punctis C, & D, vtcumque, & C D, ſit ſecta bifariam in E· Rectangulum ſub compoſita ex D A, A C, in ſexquialteram D B, cum rectangulo ſub compoſita ex D A, & dupla A C, in dimidiã C D, nempe in C E, erit æquale tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

NAM rectangulum ſub compoſita ex D A, A C, in ſexquialteram D B, æquatur duobus rectan-



gulis ſub A C, in ſexquialteram D B, & rectangulo ſub C D, in ſexquialteram D B. Rectangulum verò ſub dupla A *C*, in ſexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo A *C*, D B. Et pariter rectangulum ſub *C* D, in ſexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo E D B.

Ergo

Ergo rectangulum ſub compoſita ex DA, AC, in ſexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo AC, DB, & triplo rectangulo EDB.

Pariter, rectangulum ſub compoſita ex DA, & dupla AC, in CE, æquatur triplo rectangulo ACE, & rectangulo DCE, nempe duplo quadrato CE. Ergo rectangulum ſub compoſita ex DA, AC, in ſexquialteram DB, cum rectangulo ſub compoſita ex DA, & dupla AC, in CE, æquatur tribus rectangulis AC, DB, tribus rectangulis EDB, tribus rectangulis ACE, ſiue AC, ED, & duobus quadratis CE. Sed tria rectangula AC, DB, cum tribus rectangulis AC, ED, faciunt tria rectangula AC, EB. Quare patet propoſitum.

PROBL. XXXVII. PROP. LXXXVII

Datam ſphæram, cuius diameter ſit AB, ſectam plano DEF, cui diameter AB, ſit perpendicularis, rursùm ſecare plano GHL; plano DEF, parallelo, vt facto cono, cuius baſis DEF, axis HE, axis etiam ſegmenti intermedij GBFH; ſegmentum ſit ad conum DHF, in data proportione.

Datam

DAta proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursum secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 8 ;. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr. indiuisib. propos. 3 proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexqui alteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D E L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde, cum præsens Problema non sit aliud, quam propos. 8 ;. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.



B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-



gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sesquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo GMA. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus

rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate; sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectãgulis F A,



K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

ETiam in duobus ſuperioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, ſit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, ſequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, ſint minora quibuſcumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali ſectione. Vnde ſi proponatur. Datam rectam F B, ſectam in A, vt F A, ſit minor A B, ſed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, ſexquialtera A B, etiam G C, ſit ſexquialtera F A; rurſum diuidere ipſam in M, inter C, B, vt ſecta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, ſint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere eſſe minorem tripla, vt tamen ſit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in exceſſum ſexquialteræ F A, ſuper dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet conſideranti, alioquin non poſſet diuidi.

LEM-

LEM·IL· PROP·LXXXV·

Datam rectam lineam AB, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuisa CD, bifariam in E, tria rectangula AC, EB, cum tribus rectangulis EDB, & cum duobus quadratis CE, sint ad rectangulum ACB, in data proportione.

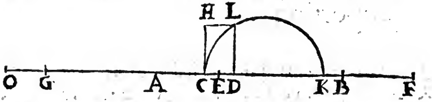
HOC Lemma quinque habet casus. Nam, vel proportio data est maior, vel æqualis, vel minor tripla; & si est minor, vel AC, est æqualis CB, vel maior, vel minor. *In omnibus istis casibus*, Lem-



ma recipit aliquas determinationes, quas assignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & sit ea, quam habet OC, ad CA. In hoc casu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habe-

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos. 78. & est, quod facta F C, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nō sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



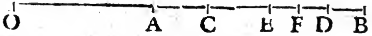
Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. proposit. 78. est æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

Quòd verò H C, sit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progressu, probaremus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidiæ C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data sit tripla, ex Scholio propositionis 77. habemus, quod A C, debet esse minor C B, sed ex Scholio propositionis 79 habetur debere esse maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam



A C, F B, sunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ est tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et subduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis commu-

nibus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc ſunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe ſunt ad ipſum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data ſit minor tripla, ſed A C, ſit æqualis C B. Patet ex Scholio propoſ. 80. debere eſſe



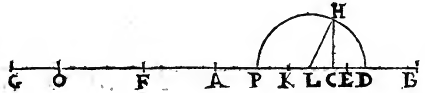
maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, eſt æquale quadrato C D. Ergo cõmuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, eſt tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, ſic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B. Ergo, & vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus

qua-

quadrato C D, ex propositione 80 sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

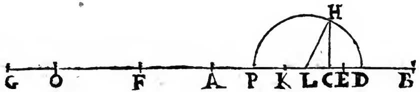
SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatio huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.



Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidē quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B,

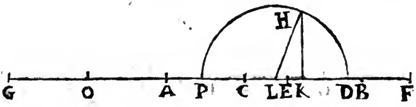
Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectangulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula



A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

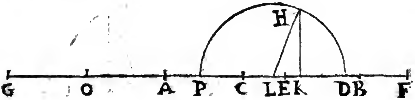
SI tandem proportio data sit minor tripla, sed A C, sit minor C B. In primis, ex Schol. proposit. 79. patet, oportere A C, esse maiorem tertia parte C B. Fiat F C, sexquialtera C B, & auferatur F K, sexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, sit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, est tria, & B F, est vnum cum dimidio, A C, est magis, quam vnum, & eius sexquialtera F K, est maior vno cum dimidio, nempè maior B F. Patet ergo, his præmissis, ex Scholio proposit. 84. oportere proportionem datam maiorem esse ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, sit media proportionalis K H, erecta normaliter super A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, describatur semicirculus P H D, secans K B, in D; (secabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.



Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, est æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua-

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seu triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad



ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 83. tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM-

LEM· L· PROP· LXXXVI·

Sit recta linea A B, secta in punctis C, & D, vtcumque, & C D, sit secta bifariam in E. Rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, cum rectangulo sub composita ex D A, & dupla A C, in dimidiã C D, nempe in C E, erit æquale tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

NAM rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, æquatur duobus rectan-



gulis sub A C, in sexquialteram D B, & rectangulo sub C D, in sexquialteram D B. Rectangulum verò sub dupla A C, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo A C, D B. Et pariter rectangulum sub C D, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo E D B.

Ergo

DAta proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursum secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 8 5. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

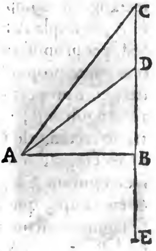
Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr. indiuisib. propos. 3 proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in F C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D E L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos. 8 5. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.



LEM· LI· PROP· LXXXVIII·

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenuſam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenuſam maiorem.

QVoniam enim quadratum BC, maius eſt quadrato BD, ergo quadratum AB, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratũ AB, cum quadrato BD, nempe quadratum AD, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam quadratum AB, cum quadrato BC, nempe quadratum AC, ad quadratum CB. Quare, & linea AD, ad lineam DB, habebit maiorem proportionem, quam AC, ad CB. Et conuertendo BD, ad DA, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA.



SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis colligitur, quod si producatur CB, in E, minor erit proportio rectanguli sub EC, in DB, ad rectangulum DAB, proportione rectanguli ECB, ad rectangulum CAB. Nam, proportio rectanguli sub EC, in DB, ad rectangulum DAB, componitur ex proportione CE, ad AB, & BD, ad DA; & proportio rectanguli ECB, ad rectangulum CAB, componitur ex eadem proportione EC, ad AB, & BC, ad CA. Sed proportio BD, ad DA, ostensa est minor proportione BC, ad CA. Quare patet propositum.

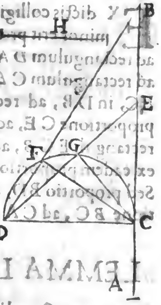
LEMMA LII. PROP. LXXXIX.

Data recta linea AB, & data DC, ei perpendiculari, ducere à puncto D, DE, occurrentem BC, inter B, C, vt rectangulum sub BA, in EC, sit ad rectangulum EDC, in data proportione.

HOC Lemma est determinatum, & determinatio est, quod ducta BD, proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum ABC, ad rectangulum BDC. Quæ determinatio patet ex superiori Scholio.

 Sit

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & super D C, fiat semicirculus ad partes B C, secans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, sic D C, ad aliam, quæ infra ostendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C, & sit C G; & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum esse, quod imperabatur.



Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, sic facta est D C, ad C G, & propter similitudinem triangulorum D C G, & D E C, vt D C, ad C G, sic est D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, sic rectangulum E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

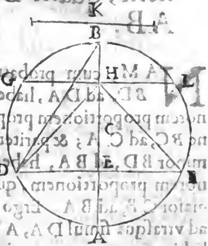
Quòd verò C G, minor sit C F; patet, quia si esset æqualis, vel maior, eodem discursu probaretur esse H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod est contra propositam determinationem.

PRO-

PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

Datis iisdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti G D F L, sit ad superficiem conicam coni HDF, in data proportione.

ETiam hoc Problema est determinatum eadem determinatione, qua determinatum est Lemma antecedens, nempe, est necesse, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B F, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, sibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt sit sicut A B, ad K, sic rectangulum sub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ

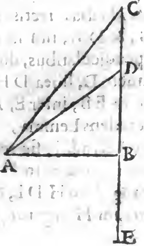


GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub A B, in E H, ad rectangulum H D E, seù vt A B, ad K, sic superficies sphærica segmenti G D F L, ad superficiem conicam coni D H F, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, qui a præsens Problema, non est aliud, quam antecedens Lemma.

LEMMA LIII. PROP. XCI.

Datis iisdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod B D, ad D A, cum A B, habebit minorem proportionem, quam B C, ad C A, cum A B.



NAM, cum probatum sit *B* D, ad D A, habere minorem proportionem proportione *B* C, ad C A; & pariter, cùm minor B D, ad B A, habeat minorem proportionem, quam maior C B, ad B A. Ergo D B, ad vtrasque simul D A, A B, habebit minorem proportionem, quam

quam C B, ad vtrasque simul C A, A B. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

ETiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub E C, in D B, ad rectangulum compositæ ex D A, A B, in A B, nempe ad rectangulum D A B, cum quadrato A B, habere minorem proportionem, quam rectangulum E C B, ad rectangulum C A B, cum quadrato A B. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

LEM. LIV. PROP. XCII.

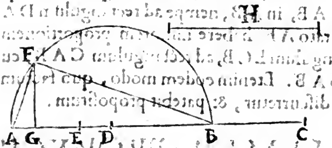
Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

DAta hypotenusa sit A B, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad A B, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt A B, ad H, sic H, ad B C, positam in directum ipsi A D, cui A B, fiat æqualis B D; deinde fiat, vt AC, ad C D, ita A B, ad B E; & à puncto *A*, aptetur A F, æqualis A E, & ducatur F B. Dico triangulum *A*FB,

esse

esse quæsitum, & in eo esse, vt H, ad A B, sic B F, ad compositam ex B A, A F.

Quoniam enim est vt A B, ad B E, sic (sumpta communi altitudine A B,) quadratum A B, ad rectangulum A B E, & vt quadratum A B, ad rectangulum A B E, sic duo quadrato A B, ad duo rectangula A B E.



Ergo, & vt A B, ad B E, sic erunt duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E Sed pariter vt A B, ad B E, sic (sũpta cõmuni altitudine A E,) est rectangulũ B A E, ad rectangulũ A E B, & duo rectangula B A E, ad duo A E B. Ergo erit vt A B, ad B E, sic tam duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E, quam duo rectangula B A E, ad duo rectangula A E B. Ergo erit, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, vel vt A B, ad B E, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Sed A B, ad B E, facta est, vt A C, ad C D. Ergo, & vt A C, ad C D, sic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Et ad consequentium dimidia.

Ergo

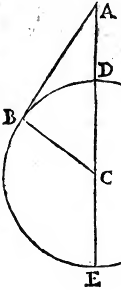
Frgo,vt A C, ad C B, ſic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Et diuidendo, vt A B, ad B C; ſic exceſſus duorum quadratorum A B,cum duobus rectangulis B A E, ſuper rectangulum A B E, & ſuper rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, ſimul. Sed talis exceſſus, eſt æqualis vno quadrato *A* B, vno quadrato A E, & duobus rectangulis B *A* E; quia vnicum quadratum A *B*, excedit rectangula A *B* E, & *A* E B, ipſo quadrato A E. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſic quadratum A *B*, cum quadrato A E,ſeù cum quadrato A F, quia A E, & A F, factæ ſunt æquales, & cum duobus rectangglis B A E, ſeù B A F, ad rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E B. Sed quadratum A B, cum quadrato A F, & cum duobus rectangulis B A F, eſt æquale quadrato compoſitæ ex B A, & A F. Et pariter, rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E *B*, eſt æquale exceſſui quadrati A B, ſuper quadratum A E, ſeù A F, cui etiam exceſſui, eſt æquale quadratum F B. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſeù vt quadratum lineæ A *B*, ad quadratum lineæ H, ſic quadratum compoſitæ ex *B* A, A F, ad quadratum lineæ F *B*. Quare conuertendo, vt quadratum H, ad quadratum A *B*, ſic quadratum F *B*, ad quadratum compoſitæ ex F A, & A *B*. Quare, & vt H, ad A B, ſic F B, ad compoſitam ex F A, A B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate poteſt etiam ſolui ſequens Problema; nempe triangulum rectangulum conſtituere, vt totus perimeter triãguli, ſit ad vnum duorum laterũ, in data proportione; vt conſideranti patet. Sed hoc Lemma poteſt facilius ſolui præmiſſo Lemmate ſequenti.

LEM. LV. PROP. XCIII.

Quodlibet latus trianguli rectanguli, eſt medium proportionale, inter compoſitam ex hypotenuſa, & ex alio latere, & inter differentiam eorundem.



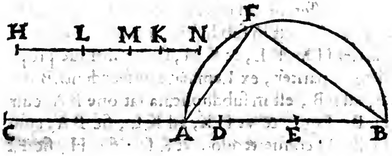
SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus rectus, qui ad B. Dico, quod v. g. A B, erit media proportionalis inter compoſitam ex A C, C B, & inter differentiam earundem A C, C B. Centro C, interuallo C B, deſcribatur circulus ſecans C A, in D, & A C, producta ei occur-

currat in E. Quoniam ergo A B, tangit circulum, quia angulus A B C, est rectus; ergo quadratum A B, est æquale rectangulo E A D. Sed A D, est differentia inter A C, C D, seu inter A C, C B; & A E, est composita ex A C, C E, hoc est C B. Quare patet propositum.

LEMMA LVI. PROP. XCIV.

Datis ijsdem facere eadem, quæ in Propositione 102.

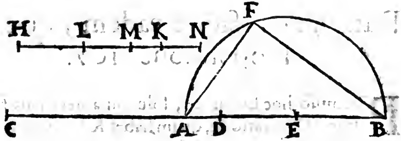
PRæmisso hoc Lemmate, soluetur antecedens facilius. Data ratio sit, quam habet K L, ad K H; & fiat vt H K, ad K L, sic K L, ad K M, & M K, producatur in N, vt M N, sit dupla M K. Pariter B A, producatur in C, vt C B, sit dupla B A, & fiat vt H N, ad



N M, sic C B, ad B D; & D B, secetur bifariam in E; & super A B, facto semicirculo, in ipso à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & iungatur F B. Dico trian-

gulum A F B, esse quæsitum, & in ipso esse, vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B.

Quoniam enim factum est, vt H N, ad N M, sic C B, nempe dupla A B, ad B D. Ergo & diuidendo, vt H M, ad M N, sic B A, cum A D, ad D B. Et ad consequentium dimidia. Ergo, vt H M, ad M K, sic B A, cum A D, ad D E. Et componendo, vt H K, ad K M,



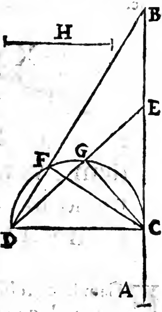
sic A B, cum A E, ad D E, seù ad E B. Sed A E, facta est æqualis A F. Ergo B E, erit differentia inter A B, & A F. Quare erit, vt H K, ad K M, sic B A, cum A F, ad E B, differentiam inter hypotenusam, & latus. Sed H K, ad K L, est in subduplicata ratione H K, ad K M, quia tres H K, K L, & K M, sunt continue proportionales; & pariter, ex Lemmate antecedenti, B A, cum A F, ad F B, est in subduplicata ratione B A, cum A F, ad E B. Ergo, & vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B. Et conuertendo, vt K L, ad K H, sic F B, ad B A, cum A F. Quod &c.

LEM-

LEM. LVII. PROP. XCV.

Datis ijsdem, quæ in proposs. 89. facere eadem, quæ ibidem, adeò vt rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, simul cum quadrato D C, sit in data proportione.

HOC etiam Lemma est determinatum, & determinatio est, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C, cum quadrato D C, vt constat ex Scholio proposit. 91. Data ergo proportio sit, quam habet H, ad D C. Data ergo D C, hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione, quam habet A B, ad H, inueniatur triangulum rectangulũ DCG, vt sit, sicut A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C, quæ inferius ostendetur minor F C, & D G, producatur vsque ad E. Dico factum esse, quod imperebatur.



Etenim, vt dictum est supra, proportio D C, ad H, com-

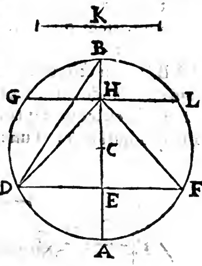
componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt A B, ad H, ſic compoſita ex C D, D G, ad G C; & vt compoſita ex C D, D G, ad G C, ſic propter ſimilitudinem triangulorum C G D, & E D C, compoſita ex E D, & D C, ad C E. Ergo proportio quoque D C, ad H, componetur ex proportione D C, ad A B, & ex proportione compoſitæ ex E D, D C, ad C E. Sed iſtæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, cum quadrato D C, ad rectangulum A B, C E. Ergo, & conuertendo, vt H, ad D C, ſic rectangulum ſub A B, in C E, ad rectangulum E D C, cum quadrato D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, ſit minor C F, patet; alioquin, eodem diſcurſu, concluderetur contra determinationem.

PROBL. XXXIX. PROP. XCVI.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica ſegmenti intermedij, ſit ad perimetrum coni, in data proportione.

ETiam hoc Problema eſt determinatum, & determinatio eſt, quod proportio data, ſit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, cum qua-



quadrato D E. Quæ determinatio patet ex superioribus, sicut etiam constructio Problematis. Nam proportio superficiei sphæricæ segmenti intermedij, G D F N, ad perimetrum coni D H F, est eadem cum proportione rectãguli A B, H E, ad rectangulũ H D E, cum quadrato D E; vt deducitur ex Archimede supra citato.

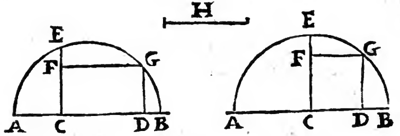
LEMMA LVIII. PROP. XCVII.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B, sit ad rectangulum A D B, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A B, ad H. Linea autem A C, respectu lineæ C B, se habet tali pacto, vt sit, vel ea minor, vt in prima figura, vel nõ minor, vt in secunda. In primis patet, semper oportere, proportionem A B, ad H, esse talis conditionis, vt

non

non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Res est euidens, quia ex omnibus rectangulis, quæ possunt haberi ex sectione A B, in puncto, factis sub duobus segmentis, maximum est quando linea secatur bifariam, & tunc tale rectangulū est æquale quadrato dimidiæ, nempe quartæ parti quadrati A B. Tunc patet, quod si A C, sit minor



C B, Lemma potest solui in quacumque proportione vniuersaliter, præter quam quod in qualibet proportione defectus; quia in proportione defectus, Lemma est coarctandum, vt non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Si verò A C, non sit minor C B; tunc Lemma nequit solui nisi in proportione maioris inæqualitatis, quia semper rectangulum A C B, est maius quocumque rectangulo A D B, vt consideranti patet. His præmissis.

Super A B, fiat semicirculus, & à puncto C, erigatur perpendicularis C E; tunc fiat, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum lineæ, quam ex determinationibus supra expositis; patet nunquam esse

maio-

maiorem dimidia A B; quare si in C E, sumatur ei æqualis, siue hæc sit semper minor E C, vt in secundo casu, siue sit minor, siue æqualis, siue maior, vt in prima figura, (quamuis ponamus in schemate minorem,) quæ sit C F, & per punctum F, ducamus F G, parallelam A B, hæc semper occurret circumferentiæ. Ducatur ergo, & occurrat in G, & à puncto G, demittatur perpendicularis D G. Dico punctum D, esse quæsitum.

Res est euidens, quia cum factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum C F, seu ad quadratum D G, ei æquale, & quadratis E C, G D, sint æqualia rectangula A C B, & A D B, alterum alteri. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Si vice semicirculorũ constituerentur super A B, semiellipses, nihilominus eodem modo fieret propositum; quia quamuis in ellipsi, quadrato v. g. C E, non sit æquale rectangulum A C B, attamen, ex propos. 21. primi Conic. est, vt quadratum C E, ad quadratum D G, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B.

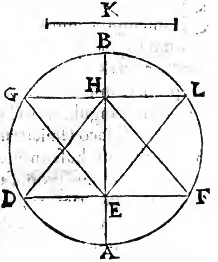
Pariter si loco semicirculorũ, vel semiellipsium vtamur duabus quibuscunque parabolis, nihilominus faciliter habebimus propositum, supponendo A B, esse vnam ex ordinatim applicatis ad axem, vel diametrũ Nam, si per punctum C, ducatur C E, parallela axi, vel diametro, & fiat vt A B, ad H, sic E C, ad C F, & fiant

 reliqua,

reliqua, vt supra; punctum D, erit quæsitum. Nam, vt alij ostendunt, sed præcipue Cavalerius lib 4. Geometr. indiuisib. propos. 3. vt EC, ad GD, sic est rectangulum ACB, ad rectangulum ADB.

PROBL. XL. PROP. XCVIII.

Datis ijsdem, quæ in superioribus Problematibus; facere eadem, quæ ibidem, vt factis duobus conis, nẽpe DHF, super basim datam, & GEL, super basim non datam, quorum communis axis sit EH, sint in data proportione.



QVoniam enim duorum conorum est eadem altitudo, ergo sunt inter se, vt bases. Quare conus DHF, erit ad conũ GEL, vt basis DEF, ad basim GHL, seu vt quadratũ DF, ad quadratũ GH, seu vt rectãgulũ AEB, ad rectãgulũ AHB. Quare cõstat præsens Problema reduci ad antece-

tecedens Lemma, & habebimus intentum, vt vnuſquiſque facile poteſt cognoſcere.

SCHOLIVM.

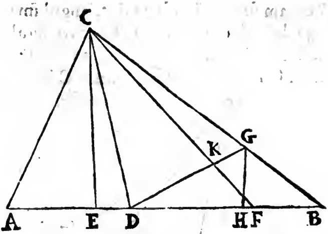
HIC ſoluenda venirent Problemata circa ſuperficies horum conorum, ſed ipſas reſeruamus ad aliud tempus, ſicut etiam hæc, nempe. Datam ſphæram, vt in ſuperioribus Problematibus, ſectam plano D E F, rursùm ſecare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono G E L, ſuper baſim non datam; vel ſegmentum intermedium G D F L, ad conum G E L; vel ſuperficies ſegmenti ad ſuperficiem, vel ad perimetrum coni, ſit in data proportione.
Sed hæc, vt diximus, reſeruamus pro alio Opere, quod, Deo fauente, imprimetur.

LEMMA LIX. PROP. IC.

Esto triangulum A C B, cuius angulus C, secetur bifariam à linea C D, & latus A C, sit minus latere C B, vnde, & A D, sit minor D B, cui A D, sit facta æqualis D F, & sit ducta C F. Si super basim D B, fiat triangulum æquale triangulo F C B, perpendiculum ipsius ductum à vertice G, semper minus erit D F, seù D A.

Quoniam C B, maior supponitur C A, fiat ipsi CA, æqualis C G, & ducatur D G. Quoniam trianguli A C D, duo latera A C, C D, sunt æqualia duobus lateribus D C, C G, trianguli D C G, alterum alteri, & angulus A C D, est æqualis angulo D C G; ergo basis A D, erit æqualis basi D G, & triangula erunt æqualia. Sed etiam triangulo A C D est æquale triangulum D C F. Ergo triangula D C F & D C G, erunt æqualia. Quare addito communi triangulo A C D, totum triangulum A C F, erit æquale trapezio A C G D. Quare, & reliquum F C B, erit æquale reliquo D G B.

Sed



Sed in hoc, dimiſſo perpendiculo G H, patet ipſum minus eſſe hypothenuſa D G, hoc eſt ipſa D A, ſeù D F. Quare patet propoſitum.

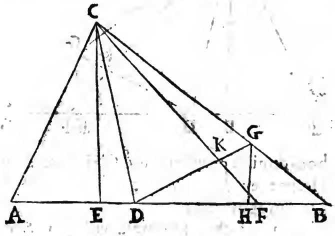
Vel poſtquam facta ſunt omnia, vt ſupra, & concluſum eſt triangulum D C G æquale eſſe triangulo D C F, ſi auferatur commune triangulum D C K, & addatur commune trapezium F K G B, nihilominus facilius concludetur propoſitum. Res eſt clara.

LEMMA LX. PROP. C.

Sint facta, & oſtenſa eadem, quæ in ſuperiori Lemmate, & ſit ductum C E, perpendiculum trianguli A C B. Erit, vt D B, ad B F, ſic C E, ad G H.

Quo-

QVoniam supra ostensum est, triangulum G D B, æquale, esse triangulo F C B, & triangulū B G D, est æquale rectangulo contento sub D B, in dimidiam G H, & pariter triangulum F C B, est æquale



rectangulo contento sub F B, in dimidiam C E. Ergo, & hæc rectangula, & illorum dupla erunt æqualia, nempe rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub F B, in C E. Quare, vt D B, ad F B, sic C E, ad G H. Quod erat ostendendum.

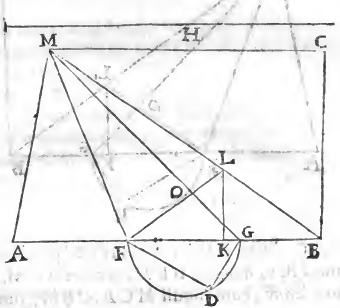
LEM. LXI. PROP. CI.

Data base, perpendiculo, & proportione laterum trianguli inuenire triangulum.

SI proportio data sit æqualitatis, res est adeò facilis, vt pudeat in hoc verba profundere. Si autem

sit

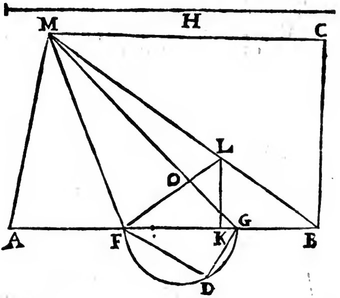
sit inæqualitatis; tunc Lemma debet determinari. Si ergo est defectus, vt in præsenti supponimus, determinatio talis est. Oportet proportionem datam, & perpendiculum talis esse conditionis, vt secta base in data proportione, & facto vt maius segmentum ad excessum eius supra minus, sic perpendiculum ad aliam, hæc sit minor minori segmento. Determinatio patet ex propositionibus antecedentibus. Nam in proposit. 99. ostensum est GH, esse minorem DF, seu DA. In 100. verò ostensum est DB, ad BF, esse, vt CE, ad GH.



Sit ergo data basis AB, & data proportio sit, quam habet AB, ad H, perpendiculum verò datum sit BC, erectum normaliter super AB, à puncto B. Diuidatur AB, in F, vt sit, sicut AB, ad H, sic AF, ad FB, fiat-

que

que F G, æqualis A F, & ſuper F G, fiat ſemicirculus, fiatque vt F B, ad B G, ſic C B, ad aliam. Patet ex determinatione, hanc eſſe minorem F G. Ergo poterit aptari in ſemicirculo, cuius diameter F G; aptetur, & ſit F D, fiatque ei æqualis F K, atque à puncto K, erigatur K L, normalis ſuper A B, quæ ſit æqualis D G, & per



punctum C, ducta C M, indefinita, & parallela A B, per puncta B, L, ducatur B L M, occurrens C M, in M, (occurret enim, cum anguli M C B, C B M, ſint duobus rectis minores;) tunc ducatur M A. Dico triangulum A M B, eſſe quæſitum. Nam eſt ſuper baſi A B, & ſuum perpendiculum C B. Quòd verò ſit, vt A B, ad H, ſic A M, ad M B, ſic patebit. Ducantur M F, M G, & F L. Patet duo triangula A M F, F M G, eſſe æqualia, pro-

propter bases A F, F G, æquales, & propterea eandem altitudinem. Cùm autem factum sit, vt F B, ad B G, sic C B, ad D G, seù ad K L; ergo rectangulum sub F B, in K L erit æquale rectangulo facto sub C B, in B G. Ergo & illorum dimidia, nempe triangula F L B, G M B, erunt æqualia. Quare communi ablato trapezio L O G B, atque addito communi triangulo F M O, triangulum F M L, erit æquale triangulo F M G, seù A M F. Cùm autem super eandem basim M F, sint duo trianguli M L F, & M G F, æqualia, ducta L G, erit parallela M F. Ergo angulus F L G, erit æqualis alterno M F L, & angulus externus A F M, erit æqualis interno, & opposito F G L. Verùm cùm duæ F K, K L, sint æquales duabus F D, D G, & anguli F K L, F D G, ab ipsis contenti sint æquales, quia recti. Ergo, & F L, erit æqualis F G, seù F A. Cùm autem in triangulo L F G, duo latera F L, F G sint æqualia. Ergo anguli quoque ad basim, nempe F L G, F G L, erunt æquales. Sed angulo F L G, est æqualis ei alternus M F L & angulo F G L, ostensus est æqualis ei externus, & oppositus A F M. Ergo habemus duo triangula M F A, & M F L, quæ habent duo latera æqualia duobus lateribus, alterum alteri, & angulus A F M, cõtentus sub æqualibus lateribus vnius, est æqualis angulo contento sub æqualibus lateribus alterius. Ergo basis A M, erit æqualis basi M L, triangulum erit æquale triangulo, & angulus A M F, erit æqualis angulo F M L. Ergo, vt A F, ad F B, seù vt A B, ad H, sic A M, ad M B. Quod erat faciendum.

Si proportio data sit excessus, soluetur Lemma faciliter, faciendo, vt prius ex alia parte, & conuertendo.

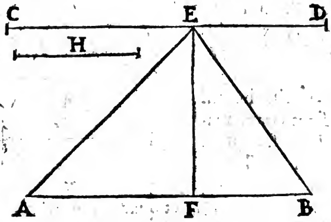
PROBL. XLII. PROP. CII.

Data AB, magnitudine, & positione, & data CD, ei parallela, tantùm positione; inuenire in CD, punctum E, vt iunctis AE, EB, & ducta perpendiculari EF, & reuolutis triangulis EAF, FEB, circa AB, vt fiant coni; superficies conica coni ex triãgulo AEF, ad superficiem conicam coni ex triangulo FEB, sit in data proportione.

Data ratio sit, quam habet AB, ad H. Problema faciliter soluetur ex antecedentibus Lemmatibus. Nam cum duæ AB, & CD, sint datæ positione, dabitur etiam EF, magnitudine, per Propos. 32. datorum. Data ergo basi AB, & dato perpendiculo EF, & data ratione laterum, quę sit proportio data AB, ad H,

inue-

inueniatur triangulum A E B, hoc est duo triangula A F E, B F E, vt sit sicut A B, ad H, sic A E, ad E B. Dico, quod si ex ipsis reuolutis circa A B, fiant coni, quod erunt quæsiti. Nam est vt A B, ad H, sic A E, ad E B, nempe rectangulum A E F, ad rectangulum B E F, nempe, ex



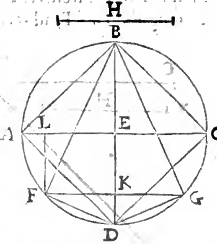
Archimede sæpe citato, superficies conica coni orti ex reuolutione trianguli A F E, circa A F, ad superficiem conicam coni orti ex reuolutione trianguli E F B, circa F B. Quod erat faciendum.

LEMMA LXII. PROP. CIII.

Sphæra ad rhombum sibi inscriptum, est vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum radij circuli, qui est basis rhombi

 Sit

SIT in sphæra, cuius centrum E, rhombus inscriptus B F D G. Dico esse &c. Fiat rhombus BADC, cuius latera sint chordæ quadratis. Quod autē sphæra ad rhombum BADC, sit vt quadratū B A, ad quadratum A E, patet; quia, ex Archimede 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 32. sphæra est talis rhombi dupla, sicut etiam quadratum B A, est duplum quadrati A E. Tunc, quoniā rhōbus BADC, est ad rhombum B F D G, vt quadratum A E, ad quadratum F K. Ergo ex æquali, sphæra ad rhombum B F D G, erit, vt quadratum B A, ad quadratum F K. Quod erat ostendendum.



PROBL. XXXXII. PROP. CIII.

In data sphæra inuenire rhombum, vt sphæra sit ad rhombum, in data ratione possibili.

RAtio possibilis est, vt proportio data non sit minor dupla, quia maximus rhombus inscriptibilium.

lium in sphæra, est æquilaterus, qui est sphæræ subduplus. Data ergo sphæra sit A B C D, cuius diametri se se decussantes ad angulos rectos in E, sint A C, B D; & sit ducta B A, & data ratio sit, quam habet B A, ad H; & inter B A, & H, inueniatur media proportionalis, quæ vtique non erit maior A E, sed vel minor, vel ęqualis, vt patebit. Si ęqualis, facto rhombo B A D C, erit quæsitus. Si autem sit minor A E, sit hęc E L, & per punctum L, ducatur L F, parallela ipsi B D, occurrens sphæræ, vel ex vna parte, vel ex alia in F, & per punctum F, acto plano F K G, cui diameter B D, sit perpendicularis, fiat rhombus B F D G. Dico hunc esse quæsitum.

In primo casu, res est clara; nam est, vt A B, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum A E, nempe sphęra ad rhombum B A D C, per antecedens Lemma.

In secundo verò casu, res est clarissima. Nam pariter est, vt B A, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum E L, nempe ad quadratum F K; nempe sic sphęra ad rhombum B F D G. Quod erat ostendendum.

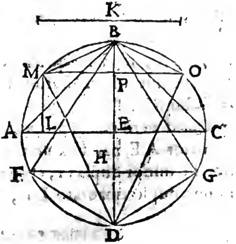
Quòd verò media proportionalis inter B A, & H, nõ sit maior A E, patet ex determinatione; quia cum B A, non sit minor dupla H; ergo nec quadratum A B, erit minus duplo quadrato L E, seù F K.

PRO-

PROBL. XLIII. PROP. CV.

In data sphæra, dato rhombo inscribere alium rhombum, ad quem rhombus datus sit, in data ratione possibili.

RAtio possibilis est, vt non sit minor ea, quam habet quadratum semidiametri basis dati ad quadratum semidiametri sphæræ, quia proportio quadrati radij basis dati rhombi, ad quadratum semidiametri sphæræ, est proportio rhombi dati ad rhombũ maximum inscriptibilẽ in sphæra; ergo non potest esse minor ea.

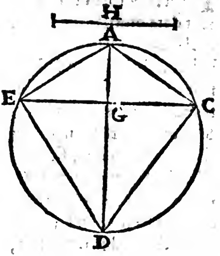


Sit ergo rhombus datus FBGD, in data sphæra A B C D, cuius diametri se secantes ad angulos rectos, sint B D, A C, & data ratio sit, quam habet A B, ad K, & fiat vt A B, ad K, sic quadratũ F H, ad quadratum alterius lineæ, quæ non erit maior A E, sed vel ei æqualis, vel minor. Si æqualis, rhombus B A D C, erit

erit quæſitus. Si minor, per L, acta L M, parallela B D, occurrens circumferentiæ, aut ex vna, aut ex altera parte, in puncto M, & intellecto rhombo M B O D, ipſe erit quæſitus. Res eſt adeò euidens, vt non mereatur prolixiorem diſcurſum.

PROBL. XLIV. PROP. CVI.

In data ſphæra inſcribere rhõbum, vt ſuperficies conicę conorum, ſint ad inuicem, in data proportione.



Datæ ſphæræ diameter ſit A D, & data proportio ſit, quã habet D A, ad H. Diuidatur D A, in G, vt ſit, ſicut quadratum D A, ad quadratum H, ſic D G, ad G A; & per punctum G, acto plano E G C, cui diameter D A, ſit normalis, fiat rhombus A E D C. Quem dico eſſe quæſitum.

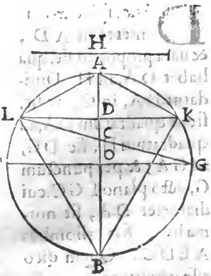
Quoniã enim vt DA,

qua-

quadratum, ad quadratum H, ita facta est D G, ad G A; vt autē D G, ad G A, sic (sūpta cōmuni altitudine DA,) rectangulū ADG, DAG, & rectāgulis ADG, DAG, sunt æqualia quadrata DE, AC, alterū alteri. Ergo, & vt quadratū D A, ad quadratū H, sic quadratū DE, ad quadratum A E. Ergo, & vt D A, ad H, sic D E, ad E A. Sed vt D E, ad E A, sic rectangulum D E G, ad rectangulū A E G; vt autem rectangulum D E G, ad rectangulum A E G, sic superficies conica coni E D C, ad superficiem conicam coni E A C. Ergo &c. Quod &c.

PROBL·XLV·PROP·CVII·

Idem.



IDem Problema soluetur aliter, & forsitā facilius. Sint data omnia, quę supra, & data proportio sit, quā habet A B, ad H. A B, F G, sint diametri se se decussātes ad angulos rectos in O; & diuidatur B A, in C, vt sit sicut B A, ad H, sic B C, ad C E; & per puncta G C, ducatur linea occurrens circumferentiæ in L; & à puncto L, ducantur L A, LB, & perpēdicularis LDK;

&

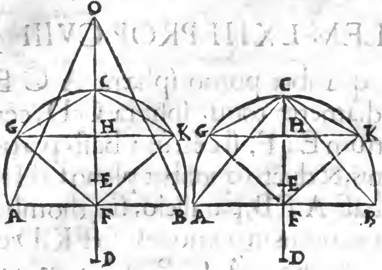
& intelligatur rhombus A L B K. Qui vtique erit quæsitus. Cùm enim duo anguli A L C, B L C, sint æquales, propter æqualitatem circumferentiarum A G, G B, quibus insistunt. Ergo vt B C, ad C A, seù, vt B A, ad H, sic B L, ad L A; nempe rectangulum B L D, &c. In reliquis sequatur præcedens demonstratio.

LEM. LXIII. PROP. CVIII.

Sit quælibet portio sphæræ A C B; diameter totius sphæræ C D, centrum E; F, si cẽtrum basis portionis, & ducto quolibet plano G H K; basi A F B, parallelo, fiat rhombus inscriptus in portione C G F K. Dico portionem A C B, ad rhombum C G F K, esse, vt rectãgulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C.

Fiat, vt D F, ad D F, cum D E, sic C F, ad F O; & fiat conus O A B. Ergo, ex Archimede 2. de sphær. & cylindr. supra citato, conus O A B, erit æqualis portioni A C B. Quoniam verò conus O A B, ad rhombum C G F K, habet proportionem compositam ex proportione

tione OF, ad FC, & ex proportione quadrati A F, ad quadratum GH. Ergo, & portio ACB, ad rhombum FGCK, habebit proportionem compositam ex ratione OF, ad FC, & ex ratione quadrati AF, ad quadratum GH; nempe ex ratione rectanguli DFC, ad rectan-



gulum DHC. Sed vt OF, ad FC, sic ED, cum DF, ad DF, ex constructione; & proportio rectanguli DFC, ad rectangulum DHC, componitur ex rationibus FD, ad DH, & FC, ad HC. Ergo, & proportio portionis ACB, ad rhombum CGFK, componetur ex rationibus ED, cum DF, ad DF; DF, ad DH, & FC, ad HC. Sed duæ rationes ED, cum DF, ad DF, & DF, ad DH, faciunt rationem ED, cum DF, ad DH. Ergo quoque proportio portionis ad rhombum componetur ex rationibus ED, cum DF, ad DH, & FC, ad CH. Sed istæ duæ

duæ rationes componunt quoque rationem rectāgulorum DFC, & ED, FC, seù EGF, ad rectangulum DHC. Quare patet propositum.

Vel intelligatur conus ACB, super eandem basim, & circa eundem axim cum portione, quæ sit ACB. Ergo portio ACB, ex Archimede 2. de sphær. & Cylin. propos. 7. est ad conum ACB, vt DF, cum DE, ad DF; sed vt DF, cum DE, ad DF, sic (sumpta communi altitudine FC,) rectangulum DFC, cum rectangulo DE, CF, hoc est cum rectangulo ECF, ei æquale, ad rectangulum DFC; vt autem conus ACB, ad rhombum CGFK, sic (propter eandem altitudinem CF,) est quadratum AF, ad quadratum GH, seù rectangulū DFC, ad rectangulum DHC. Ergo ex æquali, portio ACB, est ad rhombum GCKF, vt rectangulum DFC, cum rectangulo ECF, ad rectangulum DHC. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Forsitan non erit inutile notasse, proportionem sphæræ, & hemisphærij ad suum rhombum, esse eandem; proportionem verò maioris portionis ad suum rhombum, esse is maiorem, minoris verò minorem. Quòd patet; quia, cùm portio ACB, sit ad rhombum GCKF, vt rectangulum DFC, cum rectangulo ECF, nempe cum quadrato EC, (si portio sit hemisphæriū) ad rectangulum DHC; patet, quod in hemisphærio, rectangulum DFC, seù DEC, seù quadratum EC,

 (quia

(quia hæc omnia sunt vnum, & idem) cum quadrato E C, est duplum vnius quadrati E C. Quare hemisphęrium ad rhombum sibi inscriptum, est, vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum G H, quæ proportio est eadem cum proportione sphæræ ad suum rhombum, per proposit. 103. Quod etiam facilius patet, supponendo portionem A C B, esse hemisphærium, & mente intellecto rhombo C G D K; cuius basis eadem G H K. quia cùm duo rhombi C G F K, & C G D K, habeant communem basim G H K, erunt inter se, vt altitudines. vnde cùm in tali casu, altitudo C D, sit dupla altitudinis C F, sicut etiam sphæra est dupla hemisphærij; patet permutando, sphęram ad rhombum G C K D, esse vt hemisphęrium A C B, ad rhombum C G F K.

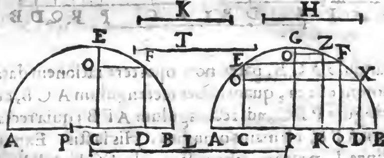
Quòd verò proportio maioris portionis ad suum rhombum sit maior his, & minoris minor; patet, quia rectangulum D F C, in primo casu, cum rectangulo E C F, est maius duplo quadrato C E, nempe quadrato inscriptibile in circulo maximo; in secundo verò casu est minus, vt experienti patebit. Res enim est facilis demonstratu.

LEM-

LEMMA LXIV. PROP. CIX.

Datam A B, vtcumque sectam in C, rursum secare in D, inter C B, vt rectangulum A C B, vna cum rectangulo dimidiæ A B, in C B, sit ad rectangulum A D B, in data ratione possibili.

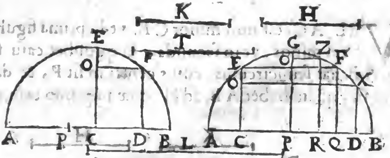
VEL A C, est non minor C B, vt in prima figura, vel minor, vt in secunda. In quolibet casu super A B, fiat semicirculus, cuius centrum sit P, & data ratio sit, quam habet A B, ad H, quæ in primo casu, de-



bet esse maior proportione rectanguli A C B, cum rectangulo sub dimidia A B, nempe sub P B, in C B, ad rectangulum A C B, quia sumpto vtcumque puncto D, semper rectãgulum A D B, minus est rectangulo A C B. In secũdo verò casu, potest esse ęqualis, maior, & minor.

Nam

Nam, si fiat ipsi C P, æqualis P Q, rectangulum A C B, erit æquale rectangulo A Q B. Si verò punctum D, sumatur inter C, Q rectangulum factum ex talibus segmentis, erit maius rectangulo A C B. Secus erit, si punctum D, sumatur inter Q, B; nam semper tale rectangulum erit minus rectangulo A C B, vt consideranti patet. Si verò proportio data est minor ea, quam habet rectāgulum A C B, cum rectangulo P B C ad rectangulum A C B, nempe si rectangulum inueniendum sit maius



rectangulo A C B, patet non oportere rationem datam minorem esse ea, quam habet rectangulum A C B, cum rectangulo P B C, ad rectangulum A P B; quia rectangulum A P B, est maius omnibus. His iactis, Exponatur linea L, potens ambo rectangula A C B, & P B C, & fiat vt A B, ad H, sic L, ad K, & inter L, K, inueniatur media T, quæ in primo casu erit minor E C, erecta normaliter super A B, à puncto C; in secundo autem casu, vel erit æqualis E C, vel maior, sed nunquā maior A P, vel minor, vt patebit inferius. In primo casu, fiat C O,

æqua-

æqualis T, & acta O F, parallela A B, ducatur F D, normalis super A B. Dico punctum D, esse quæsitum. In secundo autẽ casu, si T, sit æqualis E C, agatur E P, parallela A B, & ducatur F Q, perpendicularis, & punctum Q, erit quæsitum. Si autem T, sit quidem maior C E, sed æqualis A P, punctum P, erit quæsitum. Si verò T, sit quidem maior C E, sed minor A P, seù G P, erectæ normaliter à puncto P, fiat P O, æqualis T, & acta O Z, parallela A B, vel ex vna parte, vel ex alia, & demissa perpendiculari Z R, punctum R, erit quæsitum. Si tandem T, sit minor E C, facta ei æquali C O, & per punctum O, ducta parallela A B, ipsa O X, & à puncto X, demissa perpendiculari X D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est vt A B, ad H, sic L, ad K, & vt L, ad K, sic quadratum L, ad quadratum T, & cũ T, sit æqualis in prima figura ipsi F D; in secunda autem vel F Q, vel G P, vel Z R, vel X D. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum L, ad quadratum F D, in prima figura; in secunda verò, ad quadratum linearum æqualium ipsi T. Sed quadratum L, est æquale rectangulo A C B, & rectangulo P B C, & quadratis linearum æqualium ipsi T, in prima figura, est æquale rectangulum A D B, in secunda verò sunt eis æqualia facta sub segmentis A B, diuisæ in punctis vbi incidunt perpendiculares. Quare, & vt A B, ad H, sic rectangula A C B, & P B C, ad rectangula inuenta, & supra exposita. Quare patet propositum.

Quòd verò linea T, in ambabus figuris habeat

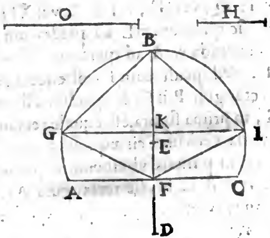
con-

conditiones prius expositas, patet ex determinatione congruente vnicuique casui, quæ determinationes supra sunt expositæ.

PROBL. XLVI. PROP. CX.

Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt portio sit ad rhombum, in data proportione.

Data portio sit ABC, & DB, sit diameter sphæræ, cuius est portio, E, sit eius centrum, & data ratio sit, quam habet BD, ad H. Cùm ergo ex propositione centum, & octo, pateat rationē portionis ad rhombum sibi inscriptum esse eandem cum ratione rectanguli DFB cum rectangulo EBF, ad rectangulū v.g DKB, inueniatur, per antecedens Lemma, punctum K, secundum hanc conditionem, vt illa duo rectangula sint ad



rectan-

rectangulum D K B, vt B D, ad H. Si per punctum K, agatur planum G K L, parallelum A C, & fiat rhombus G F L B, hic erit quæsitus. Res est euidens.

PROBL. XLVII. PROP. CXI.

In data portione dato rhombo inscripto, inscribere alium rhombum, vt rhombus prius inscriptus, sit ad hunc posteriorem, in data proportione.

HOC Problema est facillimum; quia cum illi duo rhombi sint in eadem altitudine, erunt inter se vt quadrata basium, & quadrata erunt vt rectangula contenta sub segmentis diametri; vnde adhibita congruenter Proposit. 109. habebimus intentum.

LEMMA LXV. PROP. CXII.

Datam rectam lineam F B, sectam in puncto K, rursùm in C, diuidere inter K, B, vt rectangulum F C B, cum quadrato K C, sit ad rectangulum F B C, in data proportione.

DAta proportio debet esse talis conditionis, vt si fiat in data proportione F K, ad aliam, hæc sit minor tota F B. Nam si esset æqualis, esset vt F K, ad illã, aliã, hoc est ad FB, ita rectãgulũ FKB, ad rectãgulũ FBK,

F A K C B G

vnde KB, nõ posset diuidi in data proportione; & multò minus posset diuidi, si illa alia esset maior F B. Sit ergo proportio data ea, quam habet F K, ad F A, vbicumque cadat punctum A, inter F, B, & fiat vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, ei positam in directum; deinde K B, taliter secetur in C, vt sit sicut G B, ad B A, sic B C, ad C K. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est, vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, & vt K B, ad B G, sic (sumpta communi altitudine K C,) rectangulum B K C, ad rectangulũ sub K C, in B G. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G. Pariter vt K F, ad F A, sic (sumpta communi altitudine C B,) rectangulũ F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo, & vt K F, ad F A, tàm est rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G, quam rectangulum F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo & vt K F, ad F A, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula B K C, & F K, C B, ad rectangula C K, B G, & F A, C B. Sed rectangula B K C, & F K, C B, faciunt rectangulum F C B, cum quadrato C K; quia rectangulum B K C, diuiditur in rectangulum B C K, & in quadratum K C; & rectan-

gulum

gulum B C K, cum rectangulo F K, C B, facit rectangulum F C B. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangula G B, K C, & F A, C B.

Quoniam verò factum est supra, vt G B, ad B A, sic B C, ad C K. Ergo rectangulum sub G B, in K C, erit æquale rectangulo A B C. Et communi addito rectangulo F A, C B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo F A, C B, quæ duo faciunt vnum rectangulum F B C, erunt æqualia rectangulis G B, K C, & F A, C B. Sed supra probatum est esse vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad duo rectangula G B, K C, & F A, C B. Quare & vt K F, ad F A, sic erit rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangulum F B C. Quod erat ostendendum.

PROBL. XLVIII. PROP. CXIII.

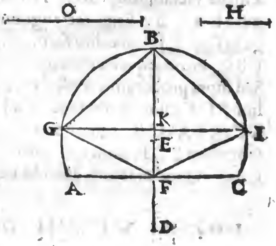
Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

DAta portio sit A C B, cuius axis sit B F, & B D, sit tota diameter sphæræ, data proportio sit, quam habet D F, ad H, & fiat vt D F, ad H, sic H, ad O. Dico in primis hoc Problema esse determinatum, & determi-

 natio-

nationem esse, quod proportio data sit talis conditionis, vt si fiat in data proportione DF, defectus axis portionis a diametro sphæræ, ad aliam, quæ sit H, & proportio DF, ad H, continuetur ad tertium terminum O; O, sit minor diametro sphæræ, vt patebit inferius.

Linea ergo DB, diuisa in F, rursum diuidatur in K, inter F, B, vt rectangulum DKB, cum quadrato KF, sit ad rectangulum DBK, vt DF, ad O, per antecedens Lemma, & per punctum K, acto plano GKL plano AFC, parallelo, intelligatur rhombus BGFL, inscriptus in portione. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt DF, ad O, nempe vt quadratum DF, ad quadratum H, sic rectangulum DKB, cum quadrato KF, ad rectangulum DBk, & rectangulo DkB, est æquale quadratum Gk, & pariter rectangulo DBK, est æquale quadratum GB. Ergo & vt quadratum DF, ad quadratum H, sic quadratum GK, cum quadrato kF, nempe quadratum GF, æquale istis duobus quadratis, ad quadratum GB. Quare, & vt linea DF, ad lineam H, sic latus FG, ad latus GB. Sed vt FG, ad GB, sic (sumpta communi altitudine GK,) rectan-



rectangulum FGK, ad rectangulum BGk; & vt rectangulum FGk, ad rectangulum BGK, sic superficies coni GFL, ad superficiē coni GBL, ex Archimede sępe citato. Ergo, & vt DF, ad H, sic superficies coni GFL, ad superficiem coni GBL. Quod erat faciendum.

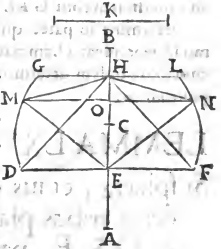
Determinatio patet, quia cùm hoc problema omnimodè dependeat à Lemmate antecedenti, debet sortiri cum ipso eandem determinationem. Quare patet propositum.

LEMMA LXVI. PROP. CXIV.

Si sphæra, cuius diameter BA, secetur tribus planis GHL, MON, & DEF, parallelis, quibus diameter AB, sit normalis, & in segmento intermedio GDFL, inscribatur rhombus HMEN. Dico, quod secta HE, bifariam in C, segmentum GDFL, erit ad rhombum HMEN, vt tria rectangula sub AE, in CB, cum tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AOB.

Nam

NAM super basim D E F, & circa axim segmenti intermedij H E, facto cono D H F, segmentum ad rhombum de forissumpto cono, habet rationem compositam ex ratione segmenti G D F L, ad conum D H F, & ex ratione coni D H F, ad rhombũ H M E N. Sed segmentum G D F L, est ad conum D H F, ex Caualerio supra citato, vt tria rectangula sub A E, in C B, cũ tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B; conus verò D H F, ad rhombum H M E N, quia sunt circa eundem axim H E, est, vt basis ad basim, nempe, vt quadratum D E, ad quadratum M O, seu vt rectangulum A E B, ad rectangulum A O B. Ergo ex æquali, segmentum G D F L, ad rhombum G M E N, erit vt tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Quod &c.



SCHOLIVM.

NON diuerso modo probaremus, segmentum G D F L, esse ad rhombum H M E N, vt tria rectangula B H, C A, cum tribus rectangulis C E A, & cum

cum duobus quadratis C H, seù C E, ad rectangulum B O A. Quare, cum rectangulum A O B, sit idem, ad quod ista plana habent eandem determinationem, patet esse æqualia, nempe tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E esse æqualia tribus rectangulis B H, C A, tribus rectangulis C E A, & duobus quadratis C E, vel C H. Quibus hinc inde ablatis, & subtriplatis omnibus; vnū rectangulum sub A E, in C B, cum vno rectangulo C H B, erit æquale vno rectangulo B H, C A, & vno rectangulo C E A. Vnde ex dictis habemus, quod si quædam recta linea B A, secetur in duobus punctis E, H, & rursùm segmentum intermedium H E, secetur bifariam in G; rectangulum A E, C B, cum rectāgulo C H B, erit æquale rectāngulo B H, C A, cum rectangulo C E A. Quod etiam patet facilius, quia hæc rectangula sunt eadem plana, sed diuersimode denominata. Nam rectangulum sub A E, & B H, est idem cum rectangulo sub B H, E A; rectangulum verò sub A E, C H, est æquale rectangulo C E A; ergo duo rectangula sub A E, B H, & sub A E, C H, nempe rectangulum sub A E, C B, erit æquale rectangulo sub B H, E A, & rectangulo C E A. Et communi addito rectangulo C H B, cui est æquale rectangulum sub B H, C E. Ergo rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo C H B, erit æquale rectangulo B H, E A; rectangulo C E A, & rectangulo B H, C E. Sed rectangulum B H, E A, cum rectangulo B H, C E, facit rectangulum B H, C A. Quare patet propositum.

Vnde

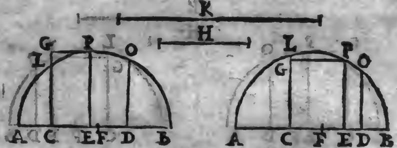
Vnde habemus ex dictis, quod si proponatur, vt proponetur in Lemmate sequenti. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis F, H; rursùm secare in O, inter E, H, vt diuisa H E, bifariam in C, rectangulum sub A F, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, sit ad rectangulum A O B, in data proportione; etiam si fiat in data proportione ex alia parte rectangulum sub B H, in C A, cum rectangulo C E A, & cum sexta parte quadrati H E, ad idem rectangulum B O A; tamen habebimus intentum.

LEM. LVII. PROP. CV.

Datam rectam AB, sectam in punctis C, & D; rursùm diuidere in E, inter C, D, vt diuisa CD, bifariam in F, rectangulum sub AC, in FB, vna cum rectãgulo FDB, & cum sexta parte quadrati CD, sit ad rectangulum AEB, in data proportione.

HOC Lemma potest habere duplicem casum; nam vel A C, D B, sunt æquales, vel inæquales. Si sint æquales, patet, quod proportio data debet esse talis conditionis, vt semper sit minor ea, quam habet rectan-

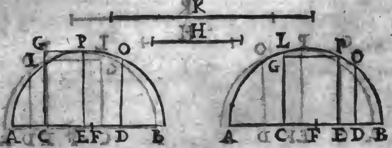
rectangulum sub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum sexta parte quadrati C D, ad alterum rectangulorum A C B, A D B. Quod patet, quia in quocumque puncto E, secetur C D, semper rectangulum A E B, erit maius rectangulo A C B, vel A D B. Debet tamen proportio data adeò esse minor, vt supra expositum est, vt tamen non sit minor ea, quam habent prædicta illa plana, ad quartam partem quadrati A B; quia rectangulum æquale quartæ parti quadrati A B, est maximũ



omnium, vt consideranti patet. Si verò A C, D B, sint inæquales, oportet, quod proportio data sit minor ea, quam habent prædicta plana ad rectangulum sub minori illarum A C, D B, in reliquam totius A B. Debet tamen taliter esse minor, vt non sit minor ea, quam habent prædicta plana, ad quartam partem quadrati A B.

Data ergo ratio sit, quam habet A B, ad H, & super A B, fiat semicirculus, & exponatur linea K, potens simul rectangulum sub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum sexta parte quadrati C D, & fiat vt A B, ad H, sic quadratum K, ad quadratum alterius lineæ,

quæ ex determinationibus supra expositis, erit non maior medietate A B, sed semper maior, lineis C L, D O, erectis normaliter super A B, à punctis C, D; in prima figura; & in secunda figura, semper erit maior O D; supponendo D B, esse minorem A C, sed potest esse aliquando maior, aliquando æqualis, & aliquando minor ipsa C L, & hoc secundum diuersas determinationes, & habitudines lineæ A C, ad totam A B; vt consideranti patet; semper tamen erit non maior medietate



Sit ergo hæc alia C G, & per punctum G, ducatur G P, parallela A B, quæ semper occurret; ex determinationibus supra positis, circumferentiæ inter puncta L, O. Occurrat ergo vt in P, & à P, dimissa perpendiculari P E, Dico punctum E, esse quæsitum.

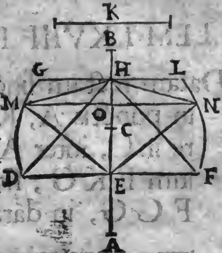
Cùm enim factum sit, vt A B, ad H; sic quadratum K, ad quadratum C G, nempe ad quadratum P E; & cum quadrato K, sint æqualia rectangulum A C, F B, rectangulum F D B, cum sexta parte quadrati C D; & pariter cum quadrato P E, sit æquale rectangulum A E B. Ergo, & vt A B, ad H; sic illa plana ad rectangulum A E B. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. IL. PROP. CXVI.

In dato ſegmento intermedio inſcribere rhombum, vt ſegmentum ſit ad rhombum, in data proportione.

DAtum ſegmentum intermedium ſit G D F L, in quo inſcribendus ſit rhombus &c. Data ratio ſit, quam habet A B, ad k. Et ſecta E H, axis ſegmenti bifariam in C, diameter A B, ſphæræ taliter diuidatur in O, vt rectangulum ſub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H ſit ad rectangulum AOB, vt tertia pars A B, ad k, per antecedens Lemma. Et per punctum O, agatur planum M O N, prioribus parallelum, & ſuper ipsũ fiat rhõbus H M E N. Quem dico eſſe quæſitum.



Sed antequam procedamus ad demonſtrationem, ſciendum eſt; quod cum præſens Problema dependeat ab antecedenti Lemmate, vt patet, & vt magis patebit,

debet cum ipso sortiri easdem determinationes, quas repetere est superuacaneum.

Quoniam enim, vt tertia pars A B, ad K, sic rectangulum A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, ad rectangulum A O B. Ergo, & vt antecedentium tripla; nempe vt A B, ad K, sic tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum tribus sextis partibus quadrati E H, nempe cum dimidio quadrati F H, seù cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Sed & vt illa plana, ad rectangulum A O B, sic segmentum G D F L, ad rhombum H M E N, ex Propositio. 114. Quare patet propositum.

LEM. LXVIII. PROP. CXVII.

Datam rectam lineam F G, sectam in punctis A, K, B, rursùm secare in C, inter A, B, vt rectangulum F K G, sit ad rectangulum F C G, in data proportione.



Hoc Lemma in aliter non differt à Propos. 115. nisi in hoc, quod terminus antecedens proportionis est diuersum, sed consequens est idem, nempe rectangulum

gulum ortum ex sectione lineæ F G, inter A, B. Quare recipit etiam cum ipso eandem determinationem, & eandem explicatioaem, vt consideranti patet. Quare non est amplius immorandum. Solum meminendum est, pro huius solutione, posse adhiberi, circulum Parabolam, & Ellipsim, vt dictum est supra in Scholio proposit. 97.

PROBL. L. PROP. CXVIII.

In dato segmento intermedio sphæræ inscripto rhombo, inscribere alium rhombum, vt rhombus inscriptus, sit ad rhombum, qui inscribetur, in data proportione.

HOc Problema dependet ab antecedenti Lemmate, & omnia ab explicatis in simili proposito; quare ex superioribus, facilè patet eius constructio, & demonstratio.

SCHOLIVM.

HIc esset soluendum Problema. In dato segmento intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conorum rhombi sint in data proportione, sed quia hoc

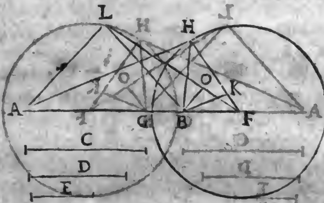
hoc Problema est quoddam particulare contentum sub vniuersali, quod statim proponetur, ideò omittitur.

LEM. LXIX. PROP. CXIX.

Inuenire circulum secantem datam rectam lineam magnitudine, & positione, taliter, vt ab extremitatibus datæ lineæ inflexis lineis, quæ vniantur in quolibet puncto circumferẽtiæ inuenti circuli, semper retineant imperatam rationẽ. Inflexis autem talibus lineis, & vnitis extra periphæriam, impossibile sit retinere eandem rationem.

HOC Lemma, vel per modum Problematis, vel per modum Theorematis, solutum fuit à diuersis. Nempe, ab Eutocio initio Comentariorum super Apollonium Pergeum. Postea aliqualiter à Bartholomæo Souero lib. 3 de recti, ac curui proportione, ni fallor. Deinde à Galileo in postremis Dialogis pagina, apud nos 45. Tandẽ à P. Bonauentura Caualerio exercitatione 6. Propos. 53. Et forsitan ab alijs, quos non vidimus. Soluemus ipsum, & nos, quamuis constructione,

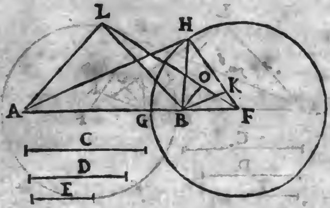
tione, & demonstratione parum diuersa à tradita ab Eutocio, præcipuè cum ipso vtamur in solutione Problematum alicuius considerationis.



Data ergo recta linea sit A B, & data proportio sit, quam habet C, ad D. Oportet inuenire circulum secantem A B, in puncto v.g. G, vt ab extremitatibus A, B, inflexis lineis A H, H B, ad quodlibet punctum circumferentiæ, semper A H, ad H B, sit vt C, ad D.

Si data proportio sit æqualitatis, Lemma, vt proponitur, nequit solui; quia, vt ibidem ait Galileus, hoc admirabile tunc accidit, quod circulus degeneret in rectam lineam indefinitam, perpendiculariter erectam super datam rectam lineam A B, à puncto eius medio. Nam ab extremitatibus A, B, inflexis lineis ad quodlibet punctũ illius perpendicularis, semper hæ retinebunt proportionem æqualitatis, quia semper constituent triangulum æquicrure. Si verò proportio data sit inæqualitatis, semper Lemma potest construi, & eius constructio talis erit.

erit. Data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum minorem, hoc est si C, sit maior D, fiat vt C, ad D, sic D, ad E; & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B,



ad B F, ipsi productam in directum; & inter A F, F B, inueniatur media proportionalis, quæ sit F G. Tunc, centro F, interuallo F G, describatur circulus. Dico hunc esse quæsitum, nimirum, quod si in periphæria ipsius sumatur quodlibet punctum H; & vniantur in ipso A H, B H; quod semper A H, ad H B, erit vt C, ad D. Ducatur per punctum B, linea B K, parallela H A. Quoniam enim F G, est media proportionalis, per constructionem, inter A F, F B. Ergo vt A F, ad F G, seu ad F H, sic F G, seu F H, ad F B. Quare habemus duo triangula, nempe A F H, H F B quæ circa communem angulum F, habent latera proportionalia. Ergo sunt similia. Ergo angulus F H B, erit æqualis angulo H A F. Sed propter parallelas A H, B K, etiam angulus A H B, est æqualis alterno H B K. Ergo etiam duo triangula

A H B, H B K, erunt similia. Ergo vt A H, ad H B, sic H B, ad B K. Et vt quadratum A H, ad quadratũ H B, sic A H, ad B K. Sed vt A H, ad B K, sic (ob parallelas A H, B K,) A F, ad F B, vt autem A F, ad F B, sic C, ad F, (quia cum supra factum sit, vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F.) Ergo, & vt C, ad E, seù, vt quadratum C ad quadratum D, sic erit quadratum A H, ad quadratum H B. Ergo, & vt C, ad D, sic A H, ad H B. Quod erat ostendendum.

Quòd verò extra circumferentiam circuli inuenti nõ sit reperibile aliud punctum, vt ad illud inflexis lineis à punctis A, B, inflexæ habeant proportionem C, ad D, patet. Nam, sit tale punctum, si datur, L, vel intra, vel extra circulum; & sint ductæ L A, L B, L F; & per punctum B, sit ducta B O, parallela A L. Quoniam, per hypothesim, vt C, ad D, sic A L, ad L B. Ergo & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic quadratum C, ad D, quadratum, nempe sic C ad E. Sed vt C, ad E, sic, ex præostensis A F, ad F B, & ob parallelas B O, L A, vt A F, ad F B, sic A L, ad B O. Ergo, & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic A L, ad B O. Ergo tres A L, L B, B O, sunt continue proportionales. Cùm verò angulus A L B, sit æqualis alterno L B O. Ergo triangula A L B, L B O, erunt similia. Vnde angulus L A B, erit æqualis angulo B L O. Cùm verò angulus ad F, sit cõmunis duobus triangulis A F L, L F B. Ergo hæc duo triangula cùm sint æquiangula, erunt similia. Vnde erit vt A F, ad F L, sic F L, ad F B. Quare F L, erit media proportionalis inter A F, F B. Sed etiam F H, est me-

dia proportionalis inter easdē duas AF, FB. Ergo duæ FL, & FH, erunt æquales. Quod implicat, siue punctum L, sumatur extra, vt in schemate, siue intra circulũ. Quare patet propositum.

PROBL. LI. PROP. CXX.

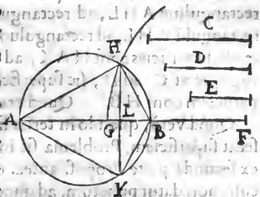
In dato quolibet solido rotundo orto ex reuolutione circa axim; siue in dato quolibet eius segmento, seù ad verticem, seù intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

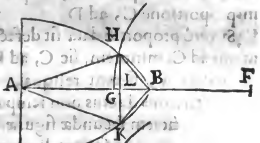
SIT solidum quodlibet rotundum, vel sphæra, vel sphæroides, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud ortum ex reuolutione circa axim, &c., inclusum à curua tantùm superficie, quod nobis repræsentatur in prima figura. Vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vel quodlibet conoides, vel conus, vt in secunda; vel quodlibet segmentum intermedium prædictorum solidorum, vt in tertia, & omnium solidorũ sit axis AB, oportet facere, quod imperatum est &c.

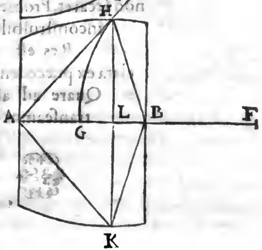
Data proportio sit, quam habet C, ad D; quæ si sit æqualitatis, erubescimus verba profundere, cùm res etiã

cæcu-

cæcutientibus sit splendidissima: Si verò proportio data sit inæqualitatis, vel est excessus, vel defectus; si est excessus, & data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum E, & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F, positam sibi in in directum, & inter A F, F B, inuenta media F G, centro F, interuallo F G, describatur portio circuli secans superficiem dati solidi in H; (in prima enim, & secunda figura semper secabit; in tertia verò nō semper, sed quando non secat, Problema est insolubile, vt patebit inferius,) & per punctum H, ducatur planū H L K, perpendiculare axi A B; & supra HLK, inscribatur rhōbus A H B K. Dico hunc esse quæsitum.





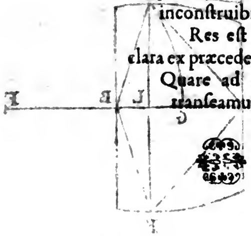


Nam, per antecedē-

tem Propositionem, est, vt C, ad D; sic A H, ad H B. Sed vt A H, ad H B; sic (sumpta communi altitudine H L,) rectangulum A H L, ad rectangulum B H L, vt autem rectangulũ A H L, ad rectangulum B H L, sic ex Archimede, superficies coni H A K, ad superficiẽ coni B H K. Ergo, & vt C, ad D, sic superficies coni A H K, ad superficiem coni H B K. Quod erat faciendum.

Quòd verò, quando in tertia figura, circulus non secat superficiem, Problema sit insolubile; patet, quia, ex secunda parte Propos. antec. extra peripheriam circuli, non datur punctum, ad quod ductæ A H, H B, sint in proportione C, ad D.

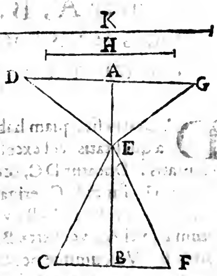
Si verò proportio data sit defectus, tunc fieret vt D, maior ad C, minorem, sic C, ad E, & producta B A, ad partes A, fierent reliqua, vt supra. Sed tunc circulus ductus non semper secaret superficiem secundæ figuræ. At quando non secaret, Problema e fiet inconstruibile. Res est clara ex præcedentibus. Quare ad alia transeamus.



PRO-

PROBL. LII. PROP. CXXI.

Data recta linea A B, à cuius extremitatibus A, B, ſint erectæ perpendiculares A D, B C, quæ pariter ſint datæ; reperire in A B, punctum E, vt iunctis E D, E C, & triangulis D E A, C E B, reuolutis circa A B; coni C E F, D E G, orti, ex tali reuolutione, ſint in data proportione.



Data proportio ſit, quam habet B A, ad H, & fiat vt quadratũ C B, ad quadratum D A, ſic B A, ad K, & B A, diuidatur in E, vt ſit, ſicut K, ad H, ſic B E, ad E A, & ductis E D, E C, intelligantur coni E C F, D E G. Quos dico eſſe quæſitos. Nam, ex propoſit. 1. proportio coni C E F, ad conum D E G, componitur

ex

ex proportione quadrati CB, ad quadratum DA, & ex proportione BE, ad EA. Sed vt quadratum BC, ad quadratum DA, sic BA, ad K; & vt BE, ad EA, sic K, ad H. Ergo proportio coni CEF, ad conum DEG, componetur quoque ex proportione BA, ad K, & K, ad H. Sed istæ duæ proportiones componunt quoque rationem BA, ad H. Ergo vt BA, ad H, sic conus CEF, ad conum DEG. Quod erat faciendum.

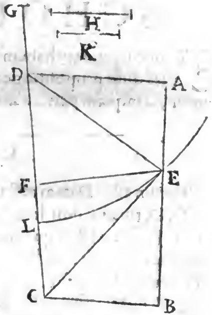
LEM. LXX. PROP. CXXII.

Data recta AB, & ab eius extremitatibus erectis normalibus BC, AD, quæ pariter sint datæ; reperire inter A, B, punctum E, vt ductis rectis lineis CE, DE, sint in data ratione possibili.

DAta ratio sit, quam habet CB, ad H, quæ vel est æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis. Ducatur DC, & diuidatur bifariam in F, & à puncto F, super DC, erigatur normalis FE, quæ occurret AB, vel inter A, B, vt in E, vel in aliquo punctorum B, vel A; vel extra BA, vel ad partes A, vel ad partes B. Vbicumque occurrat, semper istud punctum erit quæsitum, nempe si ducantur ad illud punctum lineæ

neæ à punctis D, C, istæ semper erunt æquales. Sed quando occurrit, vel in punctis A, B, vel extra ipsa, Lemma non est solubile, vt proponitur. Quando verò occurrit intra, vt in E, ductis D E, C E, patet ipsas esse æquales. Nam cum duæ D F, F E, sint æquales duabus E F, F C, & anguli D F E, E F C, sint recti. Ergo basis D E, erit æqualis basi C E.

Si verò ratio data sit excessus, fiat vt C B, ad H, sic H, ad K, & producatur C D, in G, vt sit sicut C B, ad K, sic C G, ad G D, & inter C G, G D, inueniatur media G L, & centro G, interuallo G L, describatur circulus occurrens A B, inter A, B, in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum.



Ducantur C E, D E. Ergo per ea, quæ habita sunt prop. 119. vt C B, ad K, seù vt quadratum C B, ad quadratum H, seù vt quadratum C G, ad quadratum G L, sic quadratum C E, ad quadratum E D. Quare, & vt C B, ad H, sic C E, ad E D.

Si verò circulus non occurreret *B* A, inter *B*, A, Lemma vt proponitur esset insolubile, vt patet ex secunda parte eiusdem propos. 119. quia extra circumferentiam

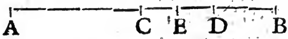
inuenti

inuenti circuli non est reperibile punctum, ad quod inflexæ lineæ retineant imperatam proportionem.

Si verò proportio C B, ad H, sit defectus; fiat pariter, vt C B, ad H, sic H, ad K; sed D C, producatur vt factū est prius, sed ex parte C, & fiant reliqua, vt prius. Nam eodem discursu concludemus conuertendo propositum. Factum est ergo, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus modum, quo soluamus alias duas propositiones, quæ sub Lemmate continentur, tamquam particularia sub generali.



Primum est. Datam rectam v. g. A B, sectam in punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt duo quadrata A C, C E, sint ad duo quadrata B D, D E, in data proportione. Nam si intelligamus A C, D B, elleuari supra C D, perpendiculariter, & inueniamus punctum E, vt ductis A E, B E, sint in subduplicata ratione proportionis datæ, punctum E, erit quæsitum.

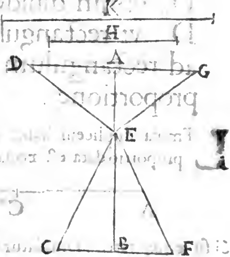
Secundum est. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt rectangulum A C B, cum quadrato C E, sit ad rectangulum A D B, cum quadrato D E, in data proportione. Nam si à punctis C, D, intelligamus erectas perpendiculariter medias proportionales inter A C, C B; & inter A D, D B.

DB. Et in CD, inueniamus punctum E, vt ductis lineis ab extremitatibus normalium ad punctum E, quæ sint in subduplicata ratione data, factum erit, quod proponebatur, vt consideranti patet.

PROBL. LIII. PROP. CXXIII.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet BA, ad H, & fiat vt CB, ad DA, sic BA, ad K, & inter puncta B, A, inueniatur punctum E, vt ductis CE, DE, sit vt K, ad H, sic CE, ad ED, per propositionem antecedentem, & ex triãgulis EBC, EAD, reuolutis circa AB, fiant coni CEF, DEG. Dico hos esse quæsitos. Nam BA, ad H, habet rationem



compositam ex ratione AB, ad K, & ex ratione K, ad

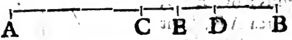
 H, sed

H, sed vt A B, ad K, sic facta est C B, ad D A, & vt K, ad H, sic C E, ad E D. Ergo ratio B A, ad H, componetur ex rationibus C B, ad D A, & C E, ad E D. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E C B, ad rectangulũ E D A, & vt rectãgulũ E C B, ad rectangulũ E D A, sic superficies conica coni E C F, ad superficiem conicam coni E D G. Quare, & vt B A, ad H, sic superficies conica coni C E F, ad superficiem conicam coni E D G. Quod erat faciendum.

LEM. LXXI. PROP. CXXIV.

Datam rectam lineam A B, sectam vtcumque in duobus punctis C, D, rursum diuidere in E, inter C, D, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, in data proportione.

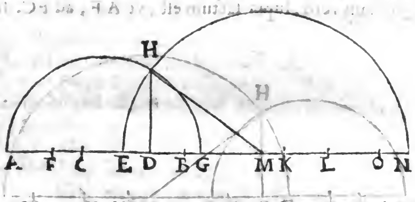
LEmma duplicem habet casum, secundùm quod proportio data est æqualitatis, vel inæqualitatis.



Si sit æqualitatis. Diuidatur D C, in E, vt sit sicut A D, ad C B, sic D E, ad E C. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim, vt tota A D, ad totam C B, sic ablata

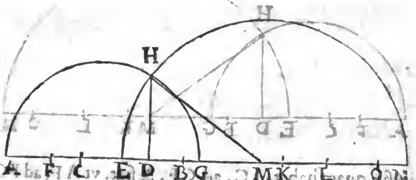
ablata D E, ad ablatam E C; ergo & reliqua A E, erit ad reliquam E B, vt tota ad totam, seu vt ablata D E, ad ablatam E C. Ergo rectangulum A E C, erit æquale rectangulo B E D.

SI verò proportio data sit inæqualitatis, determinetur rectangulum, quod debet esse maior terminus datæ proportionis, & sit hoc rectangulum A E C. Data ra-



tio sit, quam habet A C, ad G F, & fiat, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G, & super A G, fiat semicirculus, & à puncto D, erigatur super A G, normalis D H. Sumatur autem ipsius D G, dupla D K, & pariter fiat vt A F, ad F C, sic A C, ad K L, ipsi A K, positam in directum, & tandem fiat vt A F, ad A C, sic D B, ad L O, itidem A L, positam in directum; & secta D O, bifariam in M, & iuncta M H, centro M, interuallo M H, fiat semicirculus, qui vtique secabit C D, inter C, D, vt postea ostendetur; secet igitur eam in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula A D G, N D F, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato D H,

& pariter rectangulo N D E, est æquale rectangulum O E D, quia N O, vt facilè patet, est æqualis ipsi D E, & O E, est æqualis ipsi N D. Ergo rectangulum A D G, erit æquale rectangulo O E D. Ergo vt A D, ad E O, sic E D, ad D G. Sed vt A D, ad E O, sic (sumpta communi altitudine A E,) rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A E. Ergo & vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Quoniam verò, supra factum est, vt A F, ad F C, sic

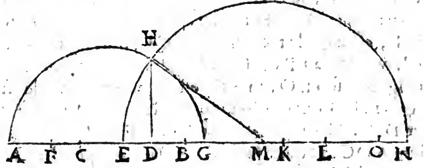


C D, ad D G. Ergo, & permutando, vt A F, ad C D, sic F C, ad D G. Et conuertendo vt C D, ad A F, sic D G, ad F C. Sed vt C D, ad A F, sic (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Ergo, & vt D G, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Sed quoque supra probatum est, vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo ex æquali, & in perturbata analogia, vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub O E, in A F. Sed rectangulum

gulum sub O E, in A F, diuiditur in rectangulum sub D E, in A F, in rectangulum sub D K, in A F, in rectangulum sub K L, in A F, & in rectangulum sub L O, in A F. Ergo & vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub D E, in A F, cum rectangulis sub D K, in A F, sub K L, in A F, & sub L O, in A F. Sed rectangulum sub D K, in A F, est æquale duplo rectangulo F C D, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G. vel dupla C D, ad duplam D G, quæ est ipsa D K. Et pariter rectangulum sub A F. in K L, est æquale rectangulo A C F, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic A C, ad K L. Et tandem rectangulum sub L O, in A F, est æquale rectangulo sub A C, in D B quia pariter supra factũ est, vt A F, ad A C, sic D B, ad L O. Ergo & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, ad quinque rectangula, nempe ad rectangulum sub D E, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo sub A C, in D B. Quod seruetur.

Rursum, quoniam vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine D B) quadratum E D, ad rectangulum sub E D, in F C. Ergo, & vt D E ad F C, tam est rectangulum A D C, ad illa quinque rectangula, quàm quadratum D E, ad rectangulum sub D E, in F C. Ergo & vt D E, ad F C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad sex rectangula, nempe ad rectangulum sub E D, in F C, cum rectangulo sub E D, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangu-

tangulo sub A C, in D B. Sed rectangula sub D E, in F C, & sub D E, in A F, faciunt rectangulum sub D E, in C A. Et pariter rectangulum sub A C, in D B, cum rectangulo sub A C, in E D, facit rectangulum sub A C, in E B. Ergo, & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F.



Tandem vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine composita ex A C, & ex dupla C D) rectangulum sub E D, in talem compositam, nempe rectangulũ sub A C, in E D, cum duobus rectangulis C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis D C F. Quare, & vt rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F, sic rectangulum sub A C, in E D, cum duplo rectangulo C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis F C D. Cum ergo sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum: Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, siue

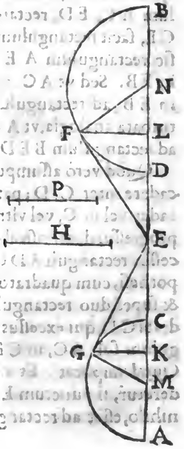
siue vt D E, ad F C. Quare & vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato E D, super rectangulum A C, E D, & super duo rectangula C D E, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, super rectangulum sub A C, in E D, & super duo rectangula C D E, est rectangulum A E C. Quia rectangulum A D C, diuiditur in rectangulum A C D, & in quadratum C D; duo autem quadrata C D, D E, excedunt duo rectágula C D E, quadrato C E, & rectangulum A C D, excedit rectangulum A C, E D, rectangulo A C E, quod cum quadrato C E, facit rectangulum A E C. Ergo, & vt D E, ad F C, sic rectangulum A E C, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed vt A C, ad E D, sic rectangulum sub A C, in E B, ad rectangulum B E D. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt A C, ad C F, sic rectangulum A E C, ad rectangulum B E D. Quod erat &c.

Quòd verò assumptum est supra, nempe punctum E, cadere inter C, D; patet. Nam, si non cadit inter C, D, cadet vel in C, vel vltra C. Non in C, quia eodem progressu, demonstrabitur esse, vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, seù ex hypothesi, cum quadrato D C, super rectangulum A C D, & super duo rectangula C D E, nempe super duo quadrata C D, qui excessus esset in tali casu nihil, ad rectangulum sub A C, in C B, nempe ad rectangulum A C B. Quod implicat. Et multum maius absurdum concluderetur, si punctum E, caderet vltra C; quia tunc minus nihilo, esset ad rectangulum positiuum, vt E D, ad F C.

LEM-

LEM. LXXII. PROP. CXXV.

Datis duobus ſemicirculis extra ſe poſitis, nec ſe contingentibus, quorum diametri ſint ſibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos ſemicirculos punctum, à quo ductis tangentibus ſemicirculos, iſtæ ſint ad inuicem, in data proportione.



Dati duo ſemicirculi ſint, quorum diametri B D, C A, ſint vna linea continuata, & D C, ſit linea extra ſemicirculos, & inter ipſos intercepta. Oportet autem facere, quod imperatum eſt; Data proportio ſit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A C, ad H, ſic H, ad P; deinde per Lemma antecedens, in C D, inueniatur punctum E, vt rectangulum A E C, ſit ad rectangulum B E D, vt A C, ad P,

&

& à puncto E, ducantur tangentes E F, E G. Quas aſſero eſſe quæſitas. Nam, quoniam vt A C, ad P, tàm eſt quadratum A C, ad quadratum H, quàm rectangulum A E C, ad rectangulum B E D, & rectangulis A E C, & B E D, ſunt æqualia quadrata tangentium E G, E F, alterum alteri. Ergo, & vt quadratum A C, ad quadratum H, ſic quadratum E G, ad quadratum E F. Quare, & vt A C, ad H, ſic E G, ad E F. Quod erat faciendum.

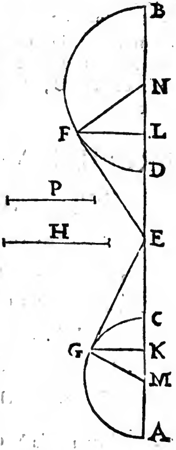
PROBL. LIV. PROP. CXXVI.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Lemmate, inuenire in C D, punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & à centris M, & N, ſemicirculorum ductis M G, & N F, duo triangula rectangula M G E, N F E, ſint in data proportione.

QVod triangula M G E, & N F E, ſint rectangula, patet ob tangentes, & ſemidiametros. Data ergo proportio ſit, quam habet A M, ad H, & in C D, inueniatur punctum E, inter C, D, vt ductis tangentibus E G, E F, tangens G E, ſit ad tangentem F E, vt N D, ad H, & iunganturF N, G M. Dico trian-

 gula

gula M G E, N F E, esse quæsita. Dimittantur à punctis G, F, perpendiculares G K, F L. Tunc arguitur sic. Proportio A M, ad H, cōponitur ex proportione A M, ad N D, seù M G, ad N F, & ex proportione N D, ad H, hoc est, ex factis, ex proportione G E, ad E F. Sed hæ duæ proportiones componunt etiam proportionē rectanguli M G E, ad rectangulum N F E. Ergo & vt A M, ad H, sic rectangulum M G E, ad rectangulum N F E. Sed propter similitudinem triangulorum rectangulorum E G M, G M K, rectangulum M G E, est æquale rectangulo sub E M, in K G, & pariter propter eandē rationem similitudinis, rectāgulū E F N, est æquale rectāgulo sub N E, in F L. Ergo, & vt A M, ad H, sic rectangulum sub E M, in K G, ad rectangulum sub N E, in F L.



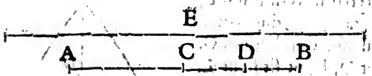
Ergo, & horum rectangulorum dimidia, nempe triangula E G M, E F N. Ergo, & vt A M, ad H, sic triangulum E G M, ad triangulum N F E. Quod erat faciendum.

LEM-

LEM. LXXIII. PROP. CXXVII.

Datam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B, C D, sit ad rectangulum AD, CB, in data proportione.

PAtet proportionem datam oportere esse defectus, quia rectangulum A B, C *D*, minus est rectangulo A *D*, C *B*, vt facile patebit consideranti. Proportio ergo data sit ea, quam habet A B, ad E; & fiat vt excessus *E*, super C B, ad C *B*, sic A C, ad C *D*. Patet punctum *D*, cadere inter C, B, quia non solum *E*, est maior A C, sed etiam A B. *D*ico punctum *D*, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt excessus *E*, super



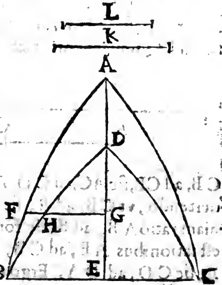
C B, ad CB, sic AC, ad C D Ergo, & cōponendo, & conuertendo, vt C B, ad *E*, sic C D, ad D A. Tunc, quoniam ratio A B, ad E, de foris sumpta C B, composita est rationibus A B, ad C B, & C *B*, ad *E*, & vt C B, ad *E*, sic C D, ad D A. Ergo ratio A B, ad E, componetur ex rationibus A B, ad C B, & CD, ad D A. Sed

 ex

ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A B, C D, ad rectangulum A D, C B. Quare patet factum esse, quod proponebatur.

PROBL. LV. PROP. CXXVIII.

Datis duabus Parabolis ABC, DBC, in eadem basi B C, & circa eandem diametrum A E, inæqualis tamen altitudinis. Ducere FHG, ordinatim applicata, vt F G, ad G H, sit in data proportione.



Data proportio sit, quam habet BC, ad K, quæ continuetur ad tertium terminum L, & datam A E, diuisa in D, rursùm diuidatur in G, inter D, E, vt sit sicut L, ad B C, sic rectangulum A E, G D, ad rectangulū A G, D E, per proposit. antecedētem; & per punctum G ordinatim applicetur G H F. Quam dico esse quæsitam. Quoniam enim quadratum F G, ad quadratum

dratum GH, de foris sumpto quadrato BE, habet rationem compositam ex ratione quadrati FG, ad quadratum BE, & ex ratione quadrati BE, ad quadratum HG. At vt quadratum FG, ad quadratum BE, sic AG, ad AE; & vt quadratum BE, ad quadratum HG, sic ED, ad DG, ex primo Conic. proposit. 20. Ergo ratio quadrati FG, ad quadratum GH, componetur ex rationibus AG, ad AE, & DE, ad DG. Sed ex iisdem rationibus componitur ratio rectanguli AG, DE, ad rectangulum AE, DG, & vt rectangulum AG, DE, ad rectangulum AE, DG, sic facta est conuertendo BC, ad L, nempe quadratum BC, ad quadratum K. Ergo, & vt quadratum BC, ad quadratum K, sic quadratum FG ad quadratum GH. Ergo, & vt BC, ad K, sic FG, ad GH. Quod erat faciendum.

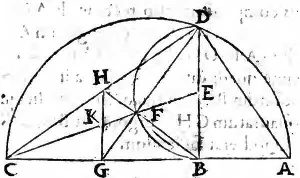
LEM. LXXIV. PROP. CXXIX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub altero, segmentorum ad quadratum alterius segmenti, sit in data proportione.

HOC Lemma solutum est etiam propos. 20. sed ad vberiorem scientiam, soluetur etiam nunc aliter, quamuis prolixius. Sit ergo data recta linea CB, quæ taliter sit secanda in G, vt rectangulum BCG, sit ad

qua-

quadratum G B, in data proportione? Data proportio sit, quam habet C B, ad B A, sibi positam in directum, & super A C, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur normalis B D, & super diametrum D B, fiat semicirculus ad partes C, cuius centrum sit E, & ducatur E C, secans circulum in F, & per puncta D F, ducatur D F G, occurrens B C, in G. Dico punctum G, esse quæsitum.



Ducatur D C, & per punctum G, agatur G H, parallela D B; & ducantur B F, F H. Quoniam D B, & H G, sunt factæ parallelæ, & D B, secatur bifariam in E, à linea C E. Ergo & H G, secabitur ab eadem bifariam in K, & angulus F K G, erit æqualis angulo D E F. Sed & angulus D F E, est æqualis sibi ad verticem K F G. Ergo triangulum D F E, erit æquiangulum, & simile triangulo K F G. Ergo, vt F D, ad D E, sic F G, ad G K. Et ad consequentium dupla. Ergo vt F D, ad D B, sic F G, ad G H. Sed & angulus G D B, est æqualis sibi alterno H G F. Ergo duo triangula D F B, H F G, sunt similia. Ergo angulus rectus D F B, est æqualis recto H F G.

Ergo

Ergo duæ lineæ BF, FH, sunt sibi in directum. Cùm autem triangulo DFB, sit simile triangulum DBG; & pariter triangulo HGF, sit simile triangulum HGB, quia omnia sunt rectangula, & bina habent vnum angulum communem. Ergo, & triangulum DBG, erit simile triangulo HGB. Quare vt DB, ad BG, ita BG, ad GH. Quare rectangulum sub DB, HG, erit æquale quadrato GB. Iungatur AD. Ergo triangulum DBA, est simile triangulo DBC; triangulo autem DBC, est simile triangulum HGC. Ergo vt DB, ad BA, sic HG, ad GC. Ergo rectangulum sub DB, in HG, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Sed rectangulum sub DB, in HG, ostensum est æquale quadrato GB. Ergo quadratum GB, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Ergo tres CG, GB, BA, sunt continue proportionales. Cùm autem sit, vt CG, ad GB, sic quadratum CG, ad rectangulum CGB. Ergo & componendo, vt CB, ad BG, sic quadratum CG, cum rectangulo CGB, nempe rectangulum BCG, ad rectangulum CGB. Sed vt CG, ad GB, seù vt GB, ad BA, sic rectangulum CGB, ad quadratum GB. Ergo ex æquali vt CB, ad BA, sic rectangulum BCG, ad quadratum GB. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Constructio præsentis Lemmatis potest inseruire pro solutione propositionis. Data vna extremarum in ordine trium continue proportionalium, & summa

ma mediæ, & alterius extremæ, distinguere singulas. Nam cùm probatum sit C G, G B, & B A, esse tres continue proportionales. Ergo B A, est vna extremarum, & C B est composita ex altera extrema, & ex media.

LEM. LXXV PROP. CXXX.

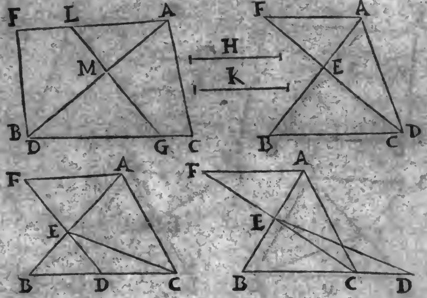
Dato triangulo ABC, & per punctum A, acta A F, indefinita, & parallela B C, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum D, & ducta D E F, triangulum externum F E A, sit ad triangulum datum A B C, in data proportione.

Quatuor diuersis modis potest dari punctum D, in linea B C. Nam vel potest cadere in ipso B, vt in prima figura, vel in ipso C, vt in secunda; vel inter B, C. vt in tertia; vel tandem vltra B C, vt in quarta. Si cadit in B, vt in prima, tunc res est facilis negotij. Nam data ratio sit, quam habet B C, ad H Et fiat vt H, ad B C, ita B C, ad F A, & ducatur F B. Dico triangulum F B A, esse quæsitum. Quod patet, quia cum duo triangula F B A, B A C, sint inter easdem parallelas; ergo habebunt eandem altitudinem. Quare

erunt

erunt ad inuicem, vt bases. Ergo triangulum F B A, erit ad triangulum B A C, vt basis F A, ad basim B C, seu vt B C, ad H.

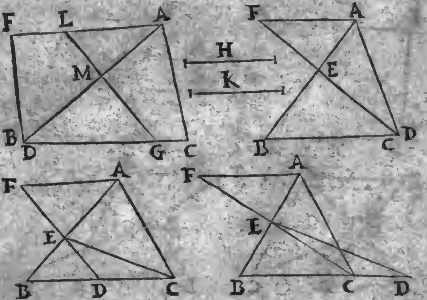
In alijs tribus casibus semper fiat, vt B C, ad B D, ita H, ad K, & per propos. antec. B A, taliter secetur in E, vt rectangulum A B E, sit ad quadratū A E, vt K, ad BC,



& ducatur per puncta D E, linea DEF, occurrens AF, in F. (Occurret enim, quia F A, B C, sunt parallelæ.) Dico triangulum F A E, esse quæsitum. Ducatur E C. Triangulum F A E, ad triangulum A B C, habet rationem cōpositam, ex rationibus trianguli FAE, ad triangulum B E D; trianguli B E D, ad triangulum B E C; & trianguli B E C, ad triangulum A B C. Sed triangulū F E A, ad triangulum B E D, (quia ob parallelas F A, BC, sunt similia;) est vt quadratum A E, ad quadratum E B; &

 trian-

triangulum B E D, est ad triangulum B E C, vt B D, ad B C; triangulum verò B E C, est ad triangulum BCA, vt B E, ad B A. Quare ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex ratione quadrati A E, ad quadratum E B, seu ex duplicata ratione A E, ad E B; & ex rationibus B D, ad B C; & B E, ad B A. Sed ex vna



ratione A E, ad E B, & ex ratione B E, ad BA, componitur ratio A E, ad B A, & vt B D, ad B C, ita est K, ad H. Ergo ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C; componetur quoque ex vna ratione A E, ad E B, ex ratione A E, ad A B, & ex ratione K, ad H. Sed ex rationibus A E, ad EB, & A E, ad A B, componitur ratio quadra-A E, ad rectangulum A B E; & vt quadratum A E, ad rectangulum A B E, sic est BC, ad K, conuertendo per constructionem. Ergo & ratio trianguli F A E, ad triangulum

lum B A C, componetur ex rationibus B C, ad K, & K, ad H; nempe erit ad ipsum, vt B C, ad H. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

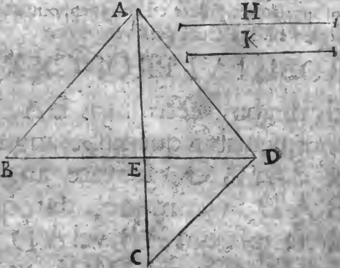
Ex dictis habemus modum, quo soluamus hanc propositionem. Dato parallelogrammo F C, vt in prima figura, cuius diameter sit B A, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum G, ducere G M L, vt triangulum L M A, sit ad parallelogrammum F C, in data proportione. Soluta est enim propositio in triangulo, quod est dimidium parallelogrammi.

PROBL. LVI. PROP. CXXXI.

Datis duabus rectis lineis B A, A D, continentibus quemlibet angulum, & data A C, secante angulum B A D, vtcumque; datoque in altera ipsarum AB, vel A D, puncto D. Ducere D E B, vt quadratum B E, sit ad rectangulum B D E, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet H, ad K, & per punctum datum D, agatur D C, parallela B A,

quæ vtique occurret A C, indefinite productæ, quia cum ipsa concurrit etiam ei parallela B A; occurrat in C, adeò vt fiat triangulum A C D; per proposit. ergo anteced., dato in C D, puncto D, ducatur D E B, occurrens A B, in B, vt triangulum A B E, sit ad triangulum A C D, vt H, ad K. Dico factum esse, quod proponebatur. Nam triangulum B E A, ad triangulum A C D, habet rationem compositam ex ratione trianguli B E A, ad triangulum A E D, & trianguli A E D, ad triangulum A C D. Ergo ratio quoque H, ad K, com-



ponetur ex istis rationibus. Sed vt triangulum B A E, ad triangulum A E D, sic est B E, ad E D; & vt triangulum E A D, ad triangulum A D C, sic est A E, ad A C. Sed ob parallelas B A, C D, vt A E, ad A C, sic B E, ad B D. Ergo ratio quoque H, ad K, componetur ex ratione B E,

ad

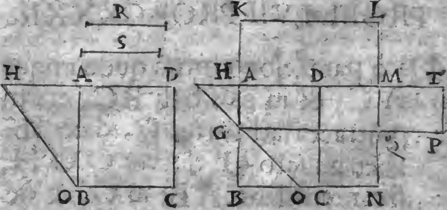
ad E D, & ex ratione B E, ad B D, sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem quadrati B E, ad rectangulum B D E. Ergo erit vt H, ad K, sic quadratum B E, ad rectangulum B D E. Quod erat faciendum.

PROBL. LVII. PROP. CXXXII.

Dato parallelogrammo quocumque A C, & in eius basi B C, etiam protracta ad partes C, dato vbilibet puncto O, ducere O G H, secantem latus A B, in G, & occurrentem M A, protractæ indefinite in H, vt triagulum H A G, sit ad parallelogrammum A C, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet R, ad S. Punctum autem O, potest cadere, vel in B, vel in C, vel inter C, B, vel tandem vltra C. Si cadit in *B*, vt in prima figura: Problema est facilis solutionis. Nam si fiat, vt S, ad R, sic dupla D A, ad A H, & iungatur *B* H, triangulum H A *B*, erit quæsitum. Nam triangulum H A B, ad triangulum, cuius basis dupla A D, & eadem altitudo cum altitudine trianguli H A B, est vt H A, ad duplam

duplam A D, nempe ex constructione vt R, ad S. Sed triangulo cujus basis A D, & altitudo, altitudo trianguli H A B, seu parallelogrammi A C, est æquale parallelogrammum A C. Quare patet propositum.



SI autem cadit in C, vel inter B, C, vel vltra C. In omnibus istis casibus fiet eadem constructio. Ad euitandam verò confusionem ponemus tantùm figuram, in qua cadit inter B, C. Vnusquisque etenim poterit applicare eandem constructionem cæteris casibus. Producatur B A, in K, vt A K, sit æqualis B O; deinde fiat vt S, ad R, sic parallelogrammum A C, ad aliud, cuius duplo applicetur ad rectam K A, in angulo K A D, æquale; quod sit K M, & vbicumque secet A D, etiam productam, si opus sit, compleatur parallelogrammum K N, & ad datam rectam lineã A M, in angulo B A M, applicetur parallelogrammũ A P, æquale parallelogrammo A N, excedens rhombo M P, secans A B, in puncto G, & per puncta O G, ducatur O G H, occurrens D A, in

in H, & faciens triangulum H A G. Dico triangulum H A *G*, esse quæsitum.

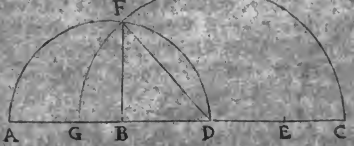
Quoniam enim parallelogrammum A N, est æquale parallelogrammo A P. Communi ablato parallelogrammo A G. *E*rgo parallelogrammum reliquum *G* N, erit æquale rhombo M P; & sunt in eodem angulo, quia tàm angulus *B G* Q. quàm angulus Q M T, externi, sunt æquales interno, & opposito *G A* M. *E*rgo vt *B* N, seù A M, ei æqualis, ad M Q. seù ad A *G*, ei æqualem, ita M Q, ad Q N, seù A G, ad *G* B. Sed vt A *G*, ad *G B*, sic (propter similitudinem triangulorum H *A* G, *G*BO, sunt enim similia, quia H A, B O, sunt parallelæ) ita H *A*, ad *B* O, seù ad *A* K, (supra enim facta est *A* K, æqualis ipsi *B* O.) Quare, & vt M *A*, ad *A G*, sic H *A*, ad *A* K. *E*rgo, quod fit sub extremis est æquale facto sub medijs, dummodo omnia sint facta sub eodem angulo, vt ab alijs ostenditur, sed præcipuè à Cavalerio lib 2. *G*eometr. indiuid. propos. 7. Ergo quod fit sub M *A*, in *A* K, nempe parallelogrammum M K. erit æquale ei, quod fit sub H *A*, in A *G*, nempe parallelogrammo duplo trianguli H A *G*; quia duo anguli K A M, & H A *G*, ad verticem sunt æquales. *E*rgo, & illorum dimidia erunt æqualia, nempe triangulum H A *G*, erit æquale dimidio parallelogrammi K M. Sed dimidium parallelogrammi K M, est ad parallelogrammum A C, vt R, ad S; (factum est enim supra, vt S, ad R sic parallelogrammũ A C, ad aliud, cuius duplum factũ est parallelogrammũ K M.) Quare, & vt R, ad S, sic triangulum H A *G*, ad parallelogrammum A C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Qvamuis in hoc Problemate ſint deſignata tantùm duo ſchemata ad euitandam confuſionem, attamen propter diuerſitatem caſus O, & diuerſitatem applicationum parallelogramorum, conſtituerentur 12. Schemata diuerſa, vt experienti patebit. In omnibus tamen caſibus, præterquam in primo, fiet eadem conſtructio.

LEM. LXXVI. PROP. CXXXIII.

Datam rectam lineam taliter producere, vt quadratum datæ, vna cum duobus rectangulis ſub data, & ſub inuenta, ad quadratum inuentæ: ſit in data proportione.



Data recta linea ſit A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, cum duobus rectan-

ctangulis A B C, sit ad quadratum B C, in data proportione, quæ sit ea, quam habet A B, ad B D, ei positam in directum. Super A D, diametro fiat semicirculus, & B D, sumatur dupla B E, à puncto autem B, erigatur normalis B F, & iuncta D F, centro D, interuallo D F, describatur semicirculus secans B E, productam in C, & in G, vbilibet. Dico A B, datam, esse productam in C, sic, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, sit ad quadratum B C, vt A B, ad B D.

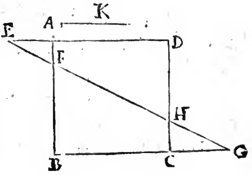
Quoniam enim duo rectangula A B D, & C B G, sunt æqualia inter se, quia ambo æqualia eidem quadrato BF, & cum rectangulum C B G, sit æquale rectangulo BCE, quia G B, & C E, sunt æquales, vt facilè patet consideranti. Ergo rectangulum A B D, erit æquale rectangulo B C E. Et communi addito rectangulo C B E. Ergo duo rectangula A B D, & C B E, erunt æqualia rectangulis B C E, & C B E, nempe quadrato B C. Verùm vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine A B,) est quadratum A B, ad rectangulum A B D. Pariter vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine B C,) est rectangulum A B C, ad rectangulum C B D; vt autem vnum ad vnum, sic duo ad duo. Ergo, & vt A B, ad B D, sic duo rectangula A B C, ad duo rectangula CBD, nempe ad rectangulum C B E. Cùm ergo probatum sit esse vt A B, ad B D, sic tàm quadratum A B, ad rectangulum A B D, quàm duo rectangula A B C, ad rectangulum C B E. Ergo, & vt A B, ad BD, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, vna cum duobus rectangulis A B C, ad rectangulũ

ABD, cum rectangulo CBE. Sed istis probatum est supra æquale esse quadratum BC. Ergo, & vt AB, ad BD, sic quadratum AB, cum duobus rectangulis ABC, ad quadratum BC. Quod erat faciendum.

PROBL. LVIII. PROP. CXXXIV.

Dato quocumque parallelogrammo, ABCD, & dato puncto G, in BC, producta; ducere GHFE, occurrentē DA, productæ in E, vt trapezium FADH, sit ad triãgulum EAF, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BC, ad K, & DA, per propos. anteced taliter producatur in E, vt quadratum DA, cum duobus rectangulis DAE, sit ad quadratum AE, vt BC, ad K. Et ducatur GE, secans latera DC, AB, in punctis H, & F. Dico factum esse, quod proponebatur.



Quoniam enim triãgula DEH, AEF, sunt similia. Ergo triangulum DEH, erit ad triãgu-

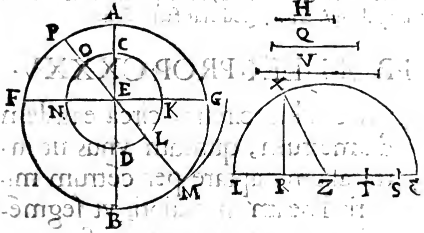
gulum A E F, vt quadratum D E, ad quadratum A E. Et diuidendo; trapezium D A F H, erit ad triangulum A E F, vt excessus quadrati D E, super quadratum A E, ad quadratum A E. sed talis excessus est æqualis quadrato D A, & duobus rectangulis D A E. Ergo, & vt quadratum D A, cum duobus rectangulis D A E, ad quadratum A E, seù vt B C, ad K; sic trapezium D A F H, ad triangulum A E F. Quod erat faciendum.

PROBL. LIX. PROP. CXXXV.

Datis duobus circulis circa eandem diametrum, quorum vnus sit intra alium, aptare per cẽtrum minoris lineam in maiori, vt segmẽta intercepta inter circumferentias circulorum, sint in data proportione.

DAtorum circulorum diametri sint A B, C D. E verò sit centrum minoris; data verò ratio sit, quam habet D E, ad H. Oportet ducere P O E L M, vt M L, ad P O, sit vt D E, ad H. Vel circuli sunt concẽtrici, vel excentrici. Si sunt cõcentrici, patet Problemã non posse solui nisi in proportione æqualitatis, & tunc omnis linea aptata in maiori circulo transiens per cen-

trum minoris facit propositum. Si verò sunt excentrici, vel se tangunt intus, vel non se tangunt, quamuis notemus tantùm schema, in quo non se tangunt; & proportio vel est æqualitatis, vel inæqualitatis; & si est inæqualitatis, si est maioris inæqualitatis, nequit esse



maior ea, quam habet B D, ad C A. Si verò sit minoris inæqualitatis, nequit esse minor ea, quam habet A C, ad D B. Ratio est, quia ex omnibus segmentis interceptis inter circumferentias linearum aptatarum in circulo maiori, & transeuntium per punctum E, D B, est maximum omnium, & A C, minimum, vt facilè potest probari. His præmissis.

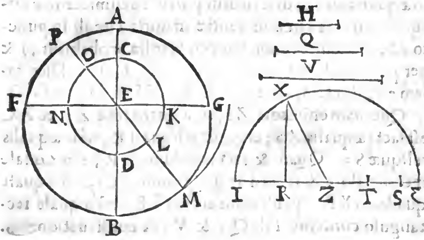
A puncto E, erigatur super A B, E F, secans circumferentiam minoris circuli in N, quæ producatur ad K, G. Et ob euitandam confusionem in schematibus reponantur seorsim R T, æqualis E K, seu E D, & Q, potens

tens excessū quadrati E G, super quadrato E K; & fiat vt H, ad R T, seu ad E D, sic R T, ad T S, sibi ipsi positam in directum. Et pariter fiat vt H, ad R T, sic Q, ad V, & inter Q, V, inueniatur media proportionalis, cui æqualis fiat R X, erecta normaliter super R T, à puncto R; & diuisa R T, bifariam in Z, & iuncta Z X, centro Z, interuallo Z X, describatur semicirculus secans R T, productam in I, & 3. Deinde centro E, interuallo æquali ipsi T I, describatur portio circumferentiæ circuli occurrens circumferentiæ maioris circuli in puncto M. (Occurret enim semper, vt infra probabitur,) & per puncta M, & E, ducatur linea M L E O P. Dico talem esse ductam, vt sit sicut E D, ad H, sic M L, ad P Q.

Quoniam enim tota Z I, est æqualis totæ Z 3, & Z R, est facta æqualis Z S; ergo, & reliqua I R, erit æqualis reliquæ S 3. Quare & rectangulum S I R, erit æquale rectangulo 3 R I. Sed rectangulum 3 R I, est æquale quadrato X R, quadratum autem X R, est æquale rectangulo contento sub Q, & V, ex constructione. Ergo rectangulum S I R, erit æquale rectangulo contẽto sub Q, & V. Quoniam verò supra factum est, vt H, ad R T, sic Q, ad V, vt autem Q, ad V, sic (sumpta communi altitudine Q,) est quadratum Q, ad rectangulum Q, V, & rectangulo Q, V, ostensum est supra æquale rectangulum S I R. Ergo, & vt H, ad R T, sic quadratum Q, ad rectangulum S I R. Pariter quoniã supra factum est, vt H, ad R T, sic R T, ad T S, vt autem R T, ad T S, sic (sumpta communi altitudine I R,) rectangulum T R I, ad rectangulum sub S T, in I R.

Ergo,

Ergo, & vt H, ad R T, sic rectangulum T R I, ad rectangulum sub T S, in I R. Sed & vt H, ad R T, sic supra probatum est esse quadratum Q, ad rectangulum S I R. Ergo & vt quadratum Q, ad rectangulum S I R, sic rectangulum T R I, ad rectangulum cõtentum sub S T, in R I. Cùm ergo sit, vt H, ad R T, sic tàm totũ quadratum Q, ad totum rectangulum S I R, quàm ab-



latum rectangulum T R I, ad ablatum rectangulũ S T, I R. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totũ, seù vt H, ad R T. Quare, & vt H, ad R T, sic excessus quadrati Q, super rectangulum T R I, ad rectangulum T I R. Sed R T, est æqualis E D, vel E L; T I, est æqualis ipsi E M; R I, est æqualis ipsi L M; vnde rectangulum T R I, est æquale rectangulo E L M, seù rectangulo sub O E, in L M; rectangulum verò T I R, est æquale rectangulo E M L; quadratum autem Q, est æ-

quale

quale excessui quadrati E G, super quadratum E K. Ergo, & vt H, ad D E, sic excessus quadrati E G, super quadrato E K, minus rectangulo sub O E, in L M, ad rectangulum E M L. Sed quoniam rectangulo F E G, seù quadrato E G, est æquale rectangulum P E M. Ergo, & quadratum E G, minus rectangulo O E, L M, & minus quadrato E K, seù E L, erit æquale rectangulo M E P, minus quadrato E L; & minus rectangulo O E, L M; nempe rectangulo sub E M, in P O. Quia rectangulũ M E P, diuiditur in rectangula M E O, & M E, O P; rectangulum verò M E O, diuiditur in rectangulum L E O, nempe in quadratum L E, & in rectangulum M L, E O. Ergo & vt H, ad D E, sic rectangulũ M E, P O, ad rectangulum E M L. Sed vt rectangulum M E, P O, ad rectangulum E M L, sic (propter eandem altitudinem M E,) est P O, ad L M. Ergo, & conuertendo vt D E, ad H, sic M L, ad P O. Quod erat &c.

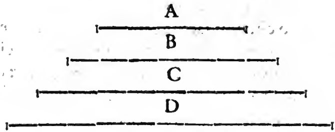
Quòd verò circulus factus cẽtro E, interuallo æquali ipsi H I, semper occurrat circumferentiæ maioris circuli, facilè patebit ex processu demonstrationis, & ex determinationibus Problematis. Quia, si non occurreret, sed caderet vel totus intra, vel totus extra, probaretur eodẽ discursu, proportionem datam esse maiorem ea, quam habet B D, ad C A; vel minorem ea, quam habet C A, ad B D, vt consideranti, & experienti patebit.

LEM-

LEM·LXXVII.PROP·CXXXVI

Si ſint quatuor rectæ lineæ continue proportionales, erit, vt quadratum primæ minoris, ad exceſſum quadrati mediæ minoris ſuper ipsã ſic media minor ad exceſſum quartæ ſuper ipſam.

SInt quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Dico eſſe, vt quadratum A, ad exceſſum quadrati B, ſuper quadratum A, ſic B, ad exceſſum D, ſuper ipſam.



Quoniam enim D, C, B, A, ſunt quatuor continue proportionales, erit, vt D, ad B, ita quadratum B, ad quadratum A. Quare, & per conuerſionem rationis, erit vt D, ad exceſſum illius ſuper B, ſic quadratum B, ad exceſſum illius ſuper quadratum A. Ergo, & diuidẽdo, vt B, ad exceſsum D, ſuper B, ſic quadratum A, ad exceſsum quadrati B, ſuper ipſum. Quod erat &c.

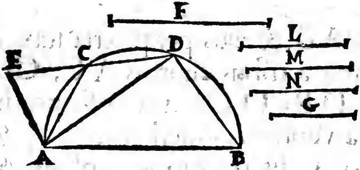
LEM·

LE. LXXVIII. PROP. CXXXVII.

Sit ſemicirculus A C B, cuius diameter A B, & eius peripharia ſubtendatur à tribus chordis A C, C D, & D B; D C, autem ſit producta verſus C, indefinite, & à puncto A, ſit ducta ſuper ipſam normalis A E. Dico parallelepipedum factum ſub A B, in rectangulum E C D, eſſe æquale ſolido facto ſub D B, in rectangulum A C D.

DVcatur A D. Quoniam duo anguli A C D, & D B A, ſunt æquales duobus rectis, quia quadrangulum A C D B, eſt in circulo; & pariter duo anguli A C E, & A C D, ſunt æquales duobus rectis. Ergo duo ſunt æquales duobus. Quare communi ablato angulo A C D, ergo angulus A C E, erit æqualis angulo A B D. Et pariter angulus rectus A E C, eſt æqualis angulo recto A D B. Quare, & reliquus erit æqualis reliquo; & triangulum A E C, erit ſimile triangulo A D B. Ergo, vt E C, ad C A, ſic D B, ad B A. Sed

vt E C, ad C A, sic (sumpta communi altitudine C D,) est rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo



& vt D B, ad B A, sic rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo solidum factum sub extremis erit æquale facto sub medijs. Ergo factum sub D B, in rectangulum D C A, erit æquale facto sub A B, in rectangulum E C D. Quod erat ostendendum.

LE. LXXIX. PROP. CXXXVIII.

Datis ijsdem, quæ supra. Dico quadratum A B, esse æquale tribus quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D.

NAM quadratum A B, est æquale duobus quadratis B D, & D A. Quadratum autem D A, est

est æquale duobus quadratis A E, & E D, quia tam angulus A E D, quam A D B, sunt recti. Quadratum autem E D, est æquale quadrato E C, quadrato C D, & duobus rectangulis E C D; & pariter duo quadrata A E, E C, sunt æqualia quadrato A C. Ergo à primo ad vltimum, quadratum A B, erit æquale quadratis B D, D C, & C A, & duobus rectangulis E C D. Quod erat ostendendum.

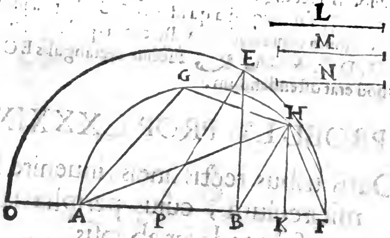
PROBL. LX. PROP. CXXXIX.

Datis tribus rectis lineis, inuenire semicirculum, cuius periphæria subtendatur ab ipsis.

Datæ tres rectæ lineæ sin L, M, N, & oporteat facere, quod imperatum est. Tunc vel omnes sunt inæquales, vel sunt duæ illarum æquales. Si duæ sunt æquales soluetur Problema per locum planũ. Sint ergo L, & M, æquales, & ipsi N, fiat æqualis A B. A puncto B, erigatur perpendicularis B E, cuius quadratum sit duplum quadrati L, vel M, & diuidatur A B, bifariam in P, & iungatur P E. Centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, cui occurrat A B, producta in punctis O, & F, & super A F, tamquam supra diametro fiat semicirculus A G F, & à puncto A, aptetur A G, æqualis A B, & circumferentia G F, secetur bifariam in H, & iungantur G H, H F, & H B, & du-

catur

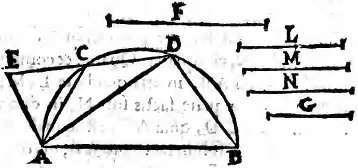
catur à puncto H, perpendicularis H K, ipsi A F. Dico G H, & H F, esse æquales ipsi L, & M, & semicirculũ A G F, esse quæsitum.



Quoniam enim circumferentia G F, est secta bifariam in H. Ergo angulus G A H, est æqualis angulo H A B. Sed etiam duæ lineæ G A, A H, sunt æquales duabus lineis H A, A B, altera alteri. Ergo triangulũ G A H, erit æquale triangulo H A B, & G H, erit æqualis H B. Sed G H, est æqualis H F. Ergo B H, erit æqualis H F. Quoniam autem duobus quadratis B K, & K H, est æquale quadratum B H, & pariter duobus quadratis H K, K F, est æquale quadratum H F, & duo quadrata B H, & H F, sunt inter se æqualia, quia & latera B H, & H F, ostensa sunt æqualia. Ergo duo quadrata B K, H K, erunt æqualia duobus quadratis H K, K F. Et communi ablato quadrato H K. Ergo, quadratum B K, erit æquale quadrato K F, & B K, erit æqua-

æqualis K F. Ergo rectangulum A F B, erit duplum rectanguli A F K. Sed rectangulo A F B, est æquale rectangulum O B F, quia B F, est æqualis O A; & rectangulum O B F, est æquale quadrato B E; & pariter rectangulum A F K, est æquale quadrato F H. Quare, & quadratum B E, erit duplum quadrati F H. Sed pariter, quadratum B E, factum est duplum quadrati L, vel M. Ergo quadratum F H, est æquale quadratis L, vel M, & F H, & H G, sunt æquales ipsis L, & M, & A G, facta est, æqualis A B, seù N. Ergo inuentus est semicirculus &c.

SI verò tres L, M, & N, sint inæquales, soluetur Problema per locum solidum, demonstratione comprehendente etiam casum antecedentem. Exponatur linea F, potens simul tria quadrata L, M, N, & fiat vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G; & data F, minori extrema, & G, differentia secundæ, & quartæ in ordine quatuor continue



proportionalium, inueniatur secunda A B, quæ fiat dimetiens semicirculi. Quoniam A B, est maior F, hoc

est tribus quadratis L, M, & N. Quare, si aptentur duæ ipsarum L, M, & N, in semicirculo, cuius diameter A B, ipsum totum non occupabunt. Aptetur A C, æqualis L, & C D, æqualis M, & D B, ducatur. Dico D B, esse æqualem N, & semicirculum A C D B, esse quæsitum. Producatur D C, versus C, indefinite, cui à puncto A, occurrat perpendicularis A E, & ducatur A D. Quoniam sunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor est F, & G, est excessus quartæ super secundam, & A B, est secunda. Ergo per proposit. 136. erit vt quadratum F, ad excessum quadrati A B, super ipsum, ita erit A B, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale facto sub excessu quadrati A B, super quadratum F, in A B. Pariter quoniam supra factum est vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale solido contento sub duplo rectangulo M, N, in L, seu solido contento sub duplo rectangulo L, M, in N. Quare solidum contentum sub duplo rectangulo L, M, in N, erit æquale facto sub A B, in excessum quadrati A B, super quadratum E, seu super tria quadrata L, M, N, ei æqualia. Quare, & communibus additis factis sub A B, in tria quadrata L, M, N. Ergo cubus A B, erit æquale factis sub N, in duo rectangula L, M, seu A C D, quia A C, est æqualis L, & C D, est æqualis M, & solidis factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, & N. Et quoniam per proposit. antec. quadratum A B, æquatur quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D. Ergo, & cubus A B, erit æ-

quale

quale factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, D B, & in duo rectangula E C D. Ergo & hæc facta erunt æqualia factis sub A B in quadrata L, & M, seù in quadrata A C, C D, & in quadratum N, & in duo rectangula A C D. Et communibus ablatis factis sub A B, in quadrata A C, C D. Ergo factum sub A B, in quadratum D B, cum facto sub A B, in duo rectangula E C D; seù sub D B, in duo rectangula A C D, quæ illis sunt æqualia, per proposit. 137 erunt æqualia factis sub AB, in quadratum N, & sub N, in duo rectangula A C D. Ex vtraque parte sunt duo æqualia, nempe duo rectangula A C D, & A B. Ergo, & N, erit æqualis D B. Quod erat ostendendum.

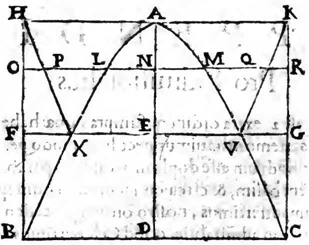
APPENDIX

Pro Indiuisibilibus.

PRopos. 2 extra ordinem sumpta, quæ habetur pag. 116. demonstrauimus peculiari modo per Indiuisibilia, Cylindrum esse duplum Conoidis parabolici super eandem basim, & circa eundem axim cum ipso. At nunc animaduertimus, nostro ordine procedendi, posse concludi illud admirabile, quod Celeberrimus Galilæus habet in postremis Dialogis, pag. apud nos 28. Nimirũ circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Modum Galilæi videat Lector, loco supra citato. Noster autem sequens est non aliter discrepans à Methodo Galilęi, nisi quia vtimur solidis diuersi ab ijs, quibus ipse vtitur.

Pro-

Proposit. ergo supra citata, cuius schema denuo ponimus ostendebamus, quod si accepto in A E, vbilibet puncto N, per quod ordinatim applicaretur O P L N, semper verum esse circulum, cuius radius O N, æquari circulis, quorum radij P N, N L. Sed non solùm hoc verum est, sed etiam armillam circularem signatam litteris O P Q R, æqualem esse circulo L N M. Quod patet faciliter; quia cum quadratum O N, sit æqualem tam duobus quadratis P N, N L, quàm quadrato P N, & rectangulo O P R, sequitur (dempto communi quadrato P N;) rectangulum O P R, remanere æquale quadrato L N; ac proinde, armillam O P Q R, esse æ-



qualē circulo L N M; & cum hoc semper verificetur, etiam verificari, excessum Cylindri H G, qui signatur litteris H F X V G K, supra frustum parabolicū H X V K, æqualem esse portioni Conoidis X A V, tàm secundum

totum,

totum, quàm secundum partes. Vnde cum v g. pars HOPQR K, sit æqualis LA M, portioni conoidis, & hoc semper verum sit; sequitur etiam, quod cum tandem ex continua diuisione deueniamus ad circumferētiam, cuius diameter H K, & ad A, verticem conoidis, etiam circumferentiam esse æqualem vertici, nempe puncto. Circa hoc non immoror, quia facilissimè, & clarissimè explicatur à Galilæo, ac eodem modo debet in casu nostro philosophari.

At P. Marius Bettinus Societatis Iesu, Vir, qui cum fuerit author Apiariorum potest Apis nuncupari; quia sicut hæc habet vnde, & mellificet, & pungat, sic hic mellificat, suauissimam doctrinam docendo, pungitque suo aculo non rectè de Mathematicis, secundum ipsum, sentientes. At Apis infelix, quæ stimulum ammittens feriendo Indiuisibilia, periclitata est. Author ergo iste parui pendens, quæ in paradoxo Galilæi ait Illustrissimus Interlocutor Sagredo Conciuis meus verbis, quæ loco Galilæi citato, possunt conspici, tom.3. sui Ærarij pareg Geom.schol.1 & alibi, notat aliqualiter Galilęi paradoxum, vnde, nec nostrum omnimodè ei placeret. Admonet ergo nō esse intelligendum, circumferentiam æqualem esse puncto sic absolutè, & Geometricè, sed physicè. Attamen deducimus ex hoc veritatem pulcherrimam, nimirum inter physica indiuisibilia vnum aliud multum physicè excedere. Nam cùm verum sit, physicè loquendo, circumferentiam, cuius diameter HK, æqualem esse puncto A, & possimus concipere Cylindrum in infinitum basium maiorum, & in eo inscriptū

Conoi-

Conoides, vt ſupra factum eſt, & ſemper circumferentia ſit æqualis, phyſicè loquendo, vertici conoidis, & tamen, & hæ circumferentiæ, & hi vertices ſint quantitates phyſicæ, adeò vt inter ipſas cadat vera proportio æqualitatis. Sequitur, quod permutando, quam proportionem habet circumferentia maior, & vt ita dicam, maxima, ad paruiſſimam circumferentiam, hanc eandem habeat vertex conoidis maximi ad verticē conoidis paruiſſimi. Vnde vertex conoidis maximi excedet, vt ita dicam, infinitè, verticem conoidis paruiſſimi; & tamen vterque vertex, eſt punctum phyſicè indiuiſibile. Et vtique admirabiliſſimum eſt conſiderare, quantum poſſimus concipere diſtrahi indiuiſibile phyſicum, vt vertex coni, vel conoidis, phyſicè accepti, æquetur circumferentiæ circuli, quæ cauſa ſuę immenſitatis, quæ poteſt concipi, infinita queat appellari.

Verùm P. Bettinus loc. ſup. cit. §. 28. &c. adducit paradoxum longè, vt ipſe appellat, miriſſimum; nimirum, non ſolum circumferentiam, ſed circulum totum, æqualem eſſe puncto. Sed vt ignorantiam meam liberè fatear, tale paradoxũ tali pacto mihi videtur miriſſimũ, vt intelligentiam meam effugiat. Contra tale paradoxum aliqua Geometrice obijcerem, ſed nolo verba habere cũ mortuis. Videat Lector tale paradoxum loco citato, & forſitan agnoſcet, quam melius fuiſſet Bettino per indiuiſibilia procedere, quam irrationabili liuore ipſa ſpernere. Sic enim ab indiuiſibilibus abhorret, vt quaſi ipſa lutum ſint, ipſe verò Armellinus, cupiat potius mori, quam fędari. Sic enim loc. ſup. cit. Schol. 2. de Indiuiſibi-

ſibilibus loquitur: *In poſtremis reſpondeo impingentibus mihi ſimilitudinem phyloſophantium circa figuras Geometricas per indiuiſibilia. Longè longius à me abſit fruſtrari Geometricas meas theorias optato fine demonſtratæ veritatis. Quod fieret ſi (contra 4. definitionem lib. 5 & ſcholia noſtra ad eam) compararem inter ſe, quæ Geometricam inter ſe proportionem non habent, qualis eſt comparatio figurarum, & phyloſophatio circa eas per indiuiſibilia.* Intelligis ergo Lector, quomodo author iſte in indiuiſibilia incidens, quaſi ſibi Dæmones occurrerent exclamet: *Longè longius à me abſit &c.* Sed cum contra indiuiſibilia Author iſte anno 1648. nihil, præter nouum liuorem, noui adducat ab ijs, quæ contra ea obiecit Paulus Guldinus in ſua centrobarica, quibus abundè ſatisfecit ipſemet Indiuiſibilium inuentor Bonauentura Caualerius in ſuis exercitationibus Geometricis exercitat. 3. anno 1647. quo, maxima Matheſis iactura, vitam cum morte cómutauit; ideò nec nos circa hoc debemus nouiter verba profundere.

SCHOLIVM.

HÆc ſunt, Benigne Lector, quæ pro hac vice determinauimus tibi legéda proponere. Quamplurima adhuc tenemus diuerſis temporibus à nobis elaborata, pręcipuè circa proportiones Superficierum Sphęricarum, & Conicarum, quę ſuis temporibui tradentur, ſi Deus ſanitatem, & vitam impertierit. Hęc perlege, ſi tibi placet, reliqua in non modica quanti-

tate

tate, vel his pulchriora, vel his turpiora expecta. Tabellam errorum, vt moris est, tradere, non exhibemus, sed ipsos corrigere tuæ industriȩ relinquimus, prȩcipuè cum adhibita aliquali diligentia, faciliter cognosci possint. Et vale.

FINIS.